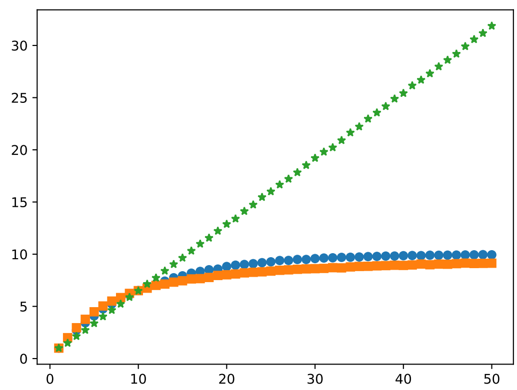
Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 8

1. a)
```
def NbDiff(L):
    X=[ ]
    for l in L:
        if l not in X:
            X.append(l)
    return len(X)
```
b)
```
from random import randint

def Z(N,k):
    return NbDiff([randint(1,N) for _ in range(k)])
```
c)
```
def espZ(N,k):
    L=[Z(N,k) for _ in range(1000)]
    return sum(L)/1000

import matplotlib.pyplot as mp
X=[i for i in range(1,51)]
Y1=[espZ(10,x) for x in X]
Y2=[espZ(x,10) for x in X]
Y3=[espZ(x,x) for x in X]
mp.plot(X,Y1,'o')
mp.plot(X,Y2,'s')
mp.plot(X,Y3,'*')
mp.show()
```



On remarque que dans les deux premiers cas on a convergence vers une valeur proche de 10 et dans le dernière cas l'espérance semble diverger vers $+\infty$ et être proportionnelle à N.

2. Z_1 est la variable certaine égale à 1 (avec 1 tirage on a 1 numéro « distinct »). Donc $E(Z_1) = 1$.

$Z_2(\Omega) = \{1; 2\}$ et $P(Z_2 = 1) = P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{N} P([X_1 = k] \cap [X_2 = k]) = N \times \frac{1}{N^2}$ car les tirages sont indépendants.

Donc $P(Z_1 = 1) = \frac{1}{N}$ et $P(Z_2 = 2) = 1 - \frac{1}{N}$.

On en déduit que $E(Z_2) = 1 \times \frac{1}{N} + 2 \times \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 2 - \frac{1}{N}$.

3. a) De même que pour Z_2, l'événement $[Z_k = 1]$ signifie que tous les numéros tirés étaient les mêmes. On a donc, par indépendance des tirages :

$$P(Z_k = 1) = \sum_{i=1}^{N} P([X_1 = i] \cap \ldots \cap [X_k = i]) = N \times \frac{1}{N^k} = \frac{1}{N^{k-1}}.$$

L'événement $[Z_k = k]$ signifie qu'on a obtenu que des numéros différents au cours des k premiers tirages. Ceci est évidemment impossible si $k > N$.

Si $k \leqslant N$, on a $P(Z_k = k) = 1 \times \dfrac{N-1}{N} \times \dfrac{N-2}{N} \times \ldots \times \dfrac{N-(k-1)}{N} = \dfrac{N!}{(N-k)!N^k}$.

b) Les événements $([Z_k = i])_{i \in [\![1;N]\!]}$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Z_{k+1} = \ell) = \sum_{i=1}^{N} P(Z_k = i) P_{[Z_k = i]}(Z_{k+1} = \ell).$$

On peut alors remarquer que à l'étape $k+1$ on a soit le même nombre de numéros distincts qu'à l'étape précédente soit 1 numéro distinct de plus.

Or $P_{[Z_k=\ell]}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{N}$ et $P_{[Z_k=\ell-1]}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{N-(\ell-1)}{N}$ (pour $\ell \geqslant 2$).

Donc, pour $\ell \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
P(Z_{k+1} = \ell) &= P(Z_k = \ell) P_{[Z_k=\ell]}(Z_{k+1} = \ell) + P(Z_k = \ell - 1) P_{[Z_k=\ell-1]}(Z_{k+1} = \ell) \\
&= \frac{\ell}{N} P(Z_k = \ell) + \frac{N - \ell + 1}{N} P(Z_k = \ell - 1).
\end{aligned}$$

On peut remarquer que la formule fonctionne encore pour $\ell = 1$ car $P(Z_k = 1 - 1) = 0$.

c) On a, par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(Z_{k+1}) &= \sum_{\ell=1}^{N} \ell P(Z_{k+1} = \ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\ell^2}{N} P(Z_k = \ell) + \sum_{\ell=1}^{N} \ell \times \frac{N-\ell+1}{N} P(Z_k = \ell - 1) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\ell^2}{N} P(Z_k = \ell) + \sum_{\ell=2}^{N} \ell \times \frac{N-\ell+1}{N} P(Z_k = \ell - 1) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\ell^2}{N} P(Z_k = \ell) + \sum_{\ell=1}^{N-1} (\ell+1) \times \frac{N-\ell}{N} P(Z_k = \ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\ell^2}{N} P(Z_k = \ell) + \sum_{\ell=1}^{N} \times \frac{N + (N-1)\ell - \ell^2}{N} P(Z_k = \ell) \\
&\qquad \text{on a ajouté 0 dans la deuxième somme} \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} P(Z_k = \ell) + \frac{N-1}{N} \sum_{\ell=1}^{N} \ell P(Z_k = \ell) \\
&= 1 + \frac{N-1}{N} E(Z_k).
\end{aligned}$$

4. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(k)$: $E(Z_k) = N\left(1 - \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^k\right)$ est vraie pour tout $k \geqslant 1$.

Pour $k = 1$, on a $N\left(1 - \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^k\right) = N \times \dfrac{1}{N} = 1 = E(Z_1)$.

$\mathscr{P}(1)$ est bien vérifiée.

Soit $k \geqslant 1$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
E(Z_{k+1}) &= \frac{N-1}{N} \times N\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^k\right)+1 \\
&= N-1-\frac{(N-1)^{k+1}}{N^k}+1 \\
&= N-\frac{(N-1)^{k+1}}{N^k} = N\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k+1}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est bien vérifiée.
D'après le principe de récurrence, la propriété est vérifiée pour tout $k \geqslant 1$.
On aurait aussi pu utiliser la méthode des suites arithmético-géométriques.

5. a) Soit N fixé. On a alors $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^k = 0$ car $-1 < \frac{N-1}{N} < 1$. Donc $E(Z_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} N$.

   b) Soit k fixé. On a alors $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^k = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathrm{e}^{k\ln(1-1/N)} = 1$. On est face à une forme indéterminée. Mais on peut remarquer que :

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^k = 1-\mathrm{e}^{k\ln(1-1/N)} &\underset{N\to+\infty}{\sim} -k\ln\left(1-\frac{1}{N}\right) \\
&\underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N}
\end{aligned}$$

   Donc $N\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^k\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} k$.

   c) En reprenant l'écriture exponentielle comme dans la question précédente on a

$$1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N = 1-\mathrm{e}^{N\ln(1-1/N)} \to 1-\mathrm{e}^{-1},$$

   donc $E(Z_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} N(1-\mathrm{e}^{-1})$.

Facultatif : la métaphore de la cantine (ENS).

1. a) L'événement $[K_{n+1}=1]$ signifie que les $n+1$ convives ont choisi la même table.
Notons Y_i la VAR égale au numéro de la table choisie par le $i^{\text{ème}}$ convive. On a :

$$\begin{aligned}
q_{n+1,1}=P(K_{n+1}=1) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty}[Y_1=j]\cap[Y_2=j]\cap\ldots\cap[Y_{n+1}=j]\right)\\
&=\sum_{j=1}^{+\infty}P\left([Y_1=j]\cap[Y_2=j]\cap\ldots\cap[Y_{n+1}=j]\right)\\
&\qquad\text{union d'événements disjoints}\\
&=\sum_{j=1}^{+\infty}P(Y_1=j)\times P_{[Y_1=j]}(Y_2=j)\times\ldots\times P_{[Y_1=j]\cap\ldots\cap[Y_n=j]}(Y_{n+1}=j)\\
&\qquad\text{formule des probabilités composées}\\
&=\sum_{j=1}^{+\infty}P(Y_1=j)\times\frac{1}{1+\theta}\times\frac{2}{2+\theta}\ldots\times\frac{n}{n+\theta}\\
&=\frac{n!}{(1+\theta)(2+\theta)\ldots(n+\theta)}\sum_{j=1}^{+\infty}P(Y_1=j)\\
&=\frac{n!}{(1+\theta)(2+\theta)\ldots(n+\theta)}.\\
&\qquad([Y_1=j])_{j\in\mathbb{N}^*}\text{ système complet d'événements}
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{q_{n+1,1}=\dfrac{n!}{(1+\theta)(2+\theta)\ldots(n+\theta)}.}$

b) Soit $i\in[\![2;n]\!]$. Comme $K_n(\Omega)=[\![1;n]\!]$, $([K_n=j])_{j\in[\![1;n]\!]}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales

$$P(K_{n+1}=i)=\sum_{j=1}^{n}P(K_n=j)P_{[K_n=j]}(K_{n+1}=i).$$

Or si $j\notin\{i-1;i\}$, $P_{[K_n=j]}(K_{n+1}=i)=0$ car il n'y a qu'un seul convive qui arrive en plus entre l'étape n et $n+1$.
De plus, $P_{[K_n=i]}(K_{n+1}=i)=\dfrac{n}{n+\theta}$ car ici le $(n+1)^{\text{ème}}$ convive a choisi l'une des tables déjà occupé et $P_{[K_n=i-1]}(K_{n+1}=i)=\dfrac{\theta}{n+\theta}$ car ici le $(n+1)^{\text{ème}}$ convive a choisi une nouvelle table.
Donc

$$P(K_{n+1}=i)=\frac{n}{n+\theta}P(K_n=i)+\frac{\theta}{n+\theta}P(K_n=i-1).$$

En résumé, $\boxed{q_{n+1,i}=\dfrac{n}{n+\theta}q_{n,i}+\dfrac{\theta}{n+\theta}q_{n,i-1}.}$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} q_{n+1,i} X^i \\
&= q_{n+1,1} X + \frac{n}{n+\theta} \sum_{i=2}^{n+1} q_{n,i} X^i + \frac{\theta}{n+\theta} \sum_{i=2}^{n+1} q_{n,i-1} X^i \\
&= \frac{n}{n+\theta} q_{n,1} X + \frac{n}{n+\theta} \sum_{i=2}^{n+1} q_{n,i} X^i + \frac{\theta}{n+\theta} \sum_{j=1}^{n} q_{n,j} X^{j+1} && \text{question 1.a) et } j = i-1 \\
&= \frac{n}{n+\theta} P_n + \frac{n}{n+\theta} q_{n,n+1} X^{n+1} + \frac{\theta}{n+\theta} X P_n \\
&= \frac{n+\theta X}{n+\theta} P_n && \text{car } q_{n,n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P_{n+1} = \frac{n+\theta X}{n+\theta} P_n.}$

b) À l'aide d'une récurrence rapide, on peut montrer que

$$P_n = \frac{n-1+\theta X}{n-1+\theta} \times \frac{n-2+\theta X}{n-2+\theta} \times \ldots \times \frac{1+\theta X}{1+\theta} P_1.$$

Comme $P_1 = q_{1,1} X = X$ on a donc

$$P_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (i+\theta X)}{\prod_{i=1}^{n-1} (i+\theta)} \times X = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (i+\theta X)}{\prod_{i=0}^{n-1} (i+\theta)} = \frac{L_n(\theta X)}{L_n(\theta)}.$$

On a bien $\boxed{P_n = \frac{L_n(\theta X)}{L_n(\theta)}.}$

3. a) K_n est une VAR finie car $K_n(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Par définition $\mathbb{E}(K_n) = \sum_{i=1}^{n} i P(K_n = i)$.

De plus, $P_n' = \sum_{i=1}^{n} P(K_n = i) \times i X^{i-1}$ donc $P_n'(1) = \sum_{i=1}^{n} i P(K_n = i)$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}(K_n) = P_n'(1).}$

Notons h la fonction $x \mapsto \ln(P_n(x))$. Comme les $q_{n,i}$ sont des probabilités ce sont des réels positifs (au moins l'un d'entre eux n'est pas nul), la fonction est donc définie au moins sur $\mathbb{R}^{+*}$.

D'après la question 2.b), pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln(\theta x + i) - \ln(L_n(\theta))$.

On a donc, en dérivant, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h'(x) = \frac{P_n'(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta x + i}$.

On en déduit que $P_n'(1) = P_n(1) \times \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta + i} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta + i}$, car $P_n(1) = 1$.

En conclusion $\boxed{\mathbb{E}(K_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta + i}.}$

b) On a tout d'abord $P_n'' = \sum_{i=1}^{n} i(i-1) q_{n,i} X^{i-2}$ donc

$$P_n''(1) = \sum_{i=1}^{n} i(i-1) q_{n,i} = \sum_{i=1}^{n} i^2 P(K_n = i) - \sum_{i=1}^{n} i P(K_n = i) = \mathbb{E}(K_n^2) - \mathbb{E}(K_n).$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbb{V}(K_n) = \mathbb{E}(K_n^2) - \mathbb{E}(K_n)^2 = P_n''(1) + P_n'(1) - (P_n'(1))^2.$$

On a bien $\boxed{\mathbb{V}(K_n) = P_n''(1) + P_n'(1) - (P_n'(1))^2.}$
On reprend notre fonction h de la question précédente et on a

$$h''(x) = \frac{P_n''(x)P_n(x) - (P_n'(x))^2}{(P_n(x))^2} = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{\theta^2}{(\theta x + i)^2}.$$

Donc, en évaluant en $x = 1$, $P_n''(1) - (P_n'(1))^2 = -\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta^2}{(\theta + i)^2}$.

On en déduit que $\boxed{\mathbb{V}(K_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta + i} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta^2}{(\theta + i)^2}.}$

4. a) Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On note ε_i la VAR égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ convive occupe une nouvelle table et 0 sinon.
La variable ε_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\theta}{i - 1 + \theta}$ d'après l'énoncé. *Cela fonctionne bien pour* $i = 1$ *car* ε_1 *est la VAR certaine égale à* 1 *ce qui correspond bien à une loi de Bernoulli de paramètre* 1.
Les variables $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendantes car l'énoncé précise que les choix successifs des convives se font au hasard et ne dépendent donc pas des choix précédents.
Et enfin on a bien $K_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ correspond au nombres de convives qui ont choisi une nouvelle table et donc au final on obtient bien le nombre de tables occupées.

b) D'après la propriété de linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(K_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\varepsilon_i)$.

Or on sait que $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = \dfrac{\theta}{i - 1 + \theta}$.

Donc $\boxed{\mathbb{E}(K_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i - 1 + \theta} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta + i}.}$
Les variables $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ étant indépendantes, par propriété de la variance

$$\mathbb{V}(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i - 1 + \theta}\left(1 - \frac{\theta}{i - 1 + \theta}\right).$$

$$\boxed{\mathbb{V}(K_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta + i}\left(1 - \frac{\theta}{\theta + i}\right).}$$

5. a) Soit $i \in [\![1;n]\!]$.
Pour tout $x \in [i - 1; i]$,

$$\frac{\theta}{\theta + i} \leqslant \frac{\theta}{\theta + x} \leqslant \frac{\theta}{\theta + i - 1}$$

car $\theta > 0$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\theta}{\theta + x}$ est décroissante sur $[i - 1; i]$.
Par croissance de l'intégrale on obtient que

$$\int_{i-1}^{i} \frac{\theta}{\theta + i}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\theta}{\theta + x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\theta}{\theta + i - 1}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{\theta}{\theta + i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\theta}{\theta + x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\theta}{\theta + i - 1}.$$

On peut réécrire cet encadrement, pour $i \in [\![1;n-1]\!]$ sous la forme :

$$\int_{i}^{i+1} \frac{\theta}{\theta + x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\theta}{\theta + i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\theta}{\theta + x}\,\mathrm{d}x$$

En sommant pour i allant de 1 à $n-1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1}\int_i^{i+1}\frac{\theta}{\theta+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\theta}{\theta+i} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\int_{i-1}^{i}\frac{\theta}{\theta+x}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow &\int_1^n\frac{\theta}{\theta+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathbb{E}(K_n)-1 \leqslant \int_0^{n-1}\frac{\theta}{\theta+x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{relation de Chasles} \\
\Leftrightarrow &\boxed{1+\int_1^n\frac{\theta}{\theta+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathbb{E}(K_n) \leqslant 1+\int_0^{n-1}\frac{\theta}{\theta+x}\,\mathrm{d}x.}
\end{aligned}$$

b) D'après la question précédente

$$1+\theta(\ln(\theta+n)-\ln(\theta+1)) \leqslant \mathbb{E}(K_n) \leqslant 1+\theta(\ln(\theta+n-1)-\ln(\theta)).$$

Pour $n>1$, comme $\ln(n)>0$, on en déduit que

$$\frac{1}{\ln(n)}+\theta\left(\frac{\ln(\theta+n)}{\ln(n)}-\frac{\ln(\theta+1)}{\ln(n)}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(K_n)}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)}+\theta\left(\frac{\ln(\theta+n-1)}{\ln(n)}-\frac{\ln(\theta)}{\ln(n)}\right).$$

On peut remarquer que $\ln(\theta+n)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{\theta}{n}\right)$ et $\ln(\theta+n-1)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{\theta-1}{n}\right)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(\theta+n)}{\ln(n)}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(\theta+n-1)}{\ln(n)}=1$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}+\theta\left(\frac{\ln(\theta+n)}{\ln(n)}-\frac{\ln(\theta+1)}{\ln(n)}\right)=\theta$.

Et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}+\theta\left(\frac{\ln(\theta+n-1)}{\ln(n)}-\frac{\ln(\theta)}{\ln(n)}\right)=\theta$.

Par encadrement de limites, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(K_n)}{\ln(n)}=\theta$ et donc, étant donné que $\theta\neq 0$,

$\boxed{\mathbb{E}(K_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\theta\ln(n).}$

6. On a $\mathbb{V}(K_n)-\mathbb{E}(K_n)=-\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{\theta^2}{(\theta+i)^2}$.

Or $\frac{\theta^2}{(\theta+i)^2}\underset{i\to+\infty}{\sim}\frac{\theta^2}{i^2}$ et on sait que la série $\sum\limits_{i\geqslant 1}\frac{1}{i^2}$ est convergente.

Donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum\frac{\theta^2}{(\theta+i)^2}$ est convergente.

On peut donc en déduire que la limite de $\mathbb{V}(K_n)-\mathbb{E}(K_n)$ est un réel, que nous pouvons noter ℓ.

Cela nous permet donc de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{V}(K_n)}{\mathbb{E}(K_n)}=1$ car $\frac{\mathbb{V}(K_n)}{\mathbb{E}(K_n)}-1=\frac{\mathbb{V}(K_n)-\mathbb{E}(K_n)}{\mathbb{E}(K_n)}\to 0$.

En conclusion, $\boxed{\mathbb{V}(K_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathbb{E}(K_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\theta\ln(n)}$