Devoir maison n$^{\text{o}}$ 3

À rendre le 6 octobre 2025

On s'intéresse dans cet exercice, pour tout x de $\mathbb{R}$, à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}^-$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est divergente.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

   a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

   b) Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$?

   c) Justifier que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

   d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

      On pourra séparer les cas n pair et n impair.

   e) En déduire une fonction Python qui, étant donné deux réel $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}, \qquad \text{puis :} \qquad \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, puis que $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

   b) À l'aide du théorème des sommes de Riemann, déterminer la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.