Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 2

1. a) Soit $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$). y est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x(2ax + b) + (x-1)(ax^2 + bx + c) = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}.$$

On en conclut que $y_p : x \mapsto x^2 - x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) L'équation homogène associée à (E) est $(H) : |x|y' + (x-1)y = 0$.
Sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme $x \neq 0$, on a $(H) \Leftrightarrow y' + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) y = 0$.
La fonction $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et une primitive est $x \mapsto x - \ln(x)$.
Donc les solutions de (H) sont les fonctions telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_H(x) = \lambda e^{-x+\ln(x)} = \lambda x e^{-x}$
D'après le théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad y(x) = x^2 - x + \lambda x e^{-x}.$$

2. a) $y_p : x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ par somme et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \quad -xy_p'(x) + (x-1)y_p(x) &= -x\left(2x + 3 - \frac{6}{x^2}\right) + (x-1)\left(x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}\right) \\ &= -2x^2 - 3x + \frac{6}{x} + x^3 - x^2 + 3x^2 \\ &\qquad - 3x + 6x - 6 + 6 - \frac{6}{x} \\ &= x^3. \end{aligned}$$

Donc cette fonction est bien une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.

b) Sur $\mathbb{R}^{-*}$, l'équation homogène associée est équivalente à $y' + \left(-1 + \dfrac{1}{x}\right) y = 0$.
La fonction $x \mapsto -1 + \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ et une primitive est $x \mapsto -x + \ln(|x|)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions telles qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \mu e^{x - \ln|x|} = -\dfrac{\mu e^x}{x}$.
Donc, d'après le théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont les fonctions telles qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \quad y(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6 - \mu e^x}{x}.$$

3. a) (i) f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc il existe λ et μ tels que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \lambda x e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \dfrac{6 - \mu e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

(ii) Comme f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - x + \lambda x e^{-x} = 0$ et :

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + 3x + 6 + \frac{6 - \mu e^x}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \mu < 6 \\ 0 & \text{si } \mu = 6 \\ +\infty & \text{si } \mu > 6 \end{cases} \left(\text{car } \frac{e^x - 1}{x} \underset{x \to 0}{\to} 1\right).$$

Donc, comme f doit être continue en 0, on a forcément $\mu = 6$ et donc

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \lambda x e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + 6\dfrac{1 - e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

(iii) Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x - 1 + \lambda e^{-x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lambda - 1$.

Pour $x < 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x + 3 + 6\dfrac{x+1-e^{x}}{x^2}$. Or $x + 1 - e^x = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 3 - 3 = 0$.

Or on a supposé au début de cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0. On doit donc avoir $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, et donc on a forcément $\lambda = 1$.

En conclusion, s'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x|f'(x) + (x-1)f(x) = x^3,$$

alors nécessairement $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + 6\dfrac{1-e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

b) Par construction, la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + 6\dfrac{1-e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ (dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ d'après les théorème généraux et dérivable en 0 d'après les calculs de la question 3.a)(iii)).

De plus, $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 - xe^{-x} + e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x + 3 + 6\dfrac{(1-x)e^x - 1}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Donc :

- Pour $x > 0$: $xf'(x) + (x-1)f(x) = 2x^2 - x - x^2e^{-x} + xe^{-x} + (x-1)(x^2 - x + xe^{-x}) = x^3$.
  Autre méthode : sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est de la forme des solutions données à la question 1.b) donc, pour $x > 0$, $xf'(x) + (x-1)f(x) = x^3$.
- Pour $x =$: $0f'(0) + (0-1)f(0) = 0 = 0^3$.
- Pour $x < 0$: $-xf'(x) + (x-1)f(x) = -2x^2 - 3x - 6\dfrac{(1-x)e^x - 1}{x} + (x-1)\left(x^2 + 3x + 6 + 6\dfrac{1-e^x}{x}\right) = x^3$.
  Autre méthode : sur $\mathbb{R}^{-*}$, f est de la forme des solutions données à la question 2.b) donc, pour $x < 0$, $xf'(x) + (x-1)f(x) = x^3$.

La fonction f satisfait bien au problème donné.