ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2021

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Lyon, Paris, Paris-Saclay et à l'ENPC

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet comprend 5 pages numérotées de 1 à 5.

* * *

Début de l'épreuve

L'épreuve est composée de quatre parties. Les trois premières parties peuvent être traitées de manière indépendante. Dans chaque partie, on pourra admettre le résultat d'une question pour continuer le sujet.

Il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Partie I

Le but de cette partie est de donner une approximation de l'intégrale d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle fini $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$. On commence par s'intéresser au cas de polynômes de degré 2.

1. Dans cette question, on étudie les polynômes suivants :

$$P_0(X) = 2X^2 - 3X + 1, \ \ P_1(X) = 2X^2 - X, \ \text{ et } P_2(X) = 4X - 4X^2.$$

1.a. Donner les racines de ces trois polynômes et les valeurs de $\int_0^1 P_i(x)\mathrm{d}x$, pour $i \in \{0; 1; 2\}$.

1.b. Montrer que pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$Q(x) = Q(0)P_0(x) + Q(1)P_1(x) + Q(1/2)P_2(x).$$

En déduire que

$$\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left[Q(0) + Q(1) + 4Q(1/2)\right].$$

Dans la suite du problème, on choisit deux réels c et d dans $[a, b]$ tels que $c < d$.

2. On considère P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. En utilisant le changement de variable $y = (d - c)x + c$, calculer

$$\int_c^d P(y)\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left[P(c) + P(d) + 4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right].$$

3. Soit g une fonction de $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous $x, y \in [a, b]$,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Dans la fin de cette partie, on fixe f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$.

4. Dans cette question, on se propose d'étudier la différence

$$\int_c^d f(y)\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left[f(c) + f(d) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right].$$

Pour cela, on pose, pour tout $h \in [0, d - c]$,

$$\phi(h) = \int_c^{c+h} f(y)\mathrm{d}y - \frac{h}{6}\left[f(c) + f(c+h) + 4f\left(c + \frac{h}{2}\right)\right].$$

4.a. Justifier que ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, d-c]$ et calculer ses dérivées jusqu'à l'ordre 3.

4.b. Montrer qu'il existe une constante M indépendante de c et d telle que, pour tout $h \in [0, d-c]$,

$$\left|\phi^{(3)}(h)\right| \leqslant Mh.$$

4.c. En déduire que pour tout $h \in [0, d-c]$, $|\phi''(h)| \leqslant \frac{M}{2}h^2$.

4.d. En procédant de même, établir que

$$\left|\int_c^d f(y)\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left[f(c) + f(d) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right]\right| \leqslant \frac{M}{24}(d-c)^4.$$

5. On fixe n entier strictement positif. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on pose

$$f_i := f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right) + 4f\left(a + (i+1/2)\frac{b-a}{n}\right).$$

Montrer qu'il existe une constante M, indépendante de n, telle que

$$\left|\int_a^b f(y)\mathrm{d}y - \frac{(b-a)}{6n}\sum_{i=0}^{n-1} f_i\right| \leqslant \frac{M}{24n^3}(b-a)^4.$$

Partie II

Dans cette partie, on considère $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X où X est une variable aléatoire à valeurs réelles, de moyenne μ, de variance finie $\sigma^2 > 0$. De plus, pour tout entier $n > 0$, et pour tout réel x, on suppose

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \geqslant -x\right).$$

Questions préliminaires :

a. Donner la moyenne et la variance de la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Puis démontrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right| \geqslant \epsilon\right) = 0.$$

b. Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Soit n un entier strictement positif, montrer que la variable $\sum_{i=1}^n \frac{X_i+1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right| \geqslant 1\right)\right] = -\ln(2).$$

On revient maintenant au cas général.

1. On considère deux entiers strictement positifs n et q et deux réels strictement positifs ϵ_1 et ϵ_2.

1.a. Justifier que les deux variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i$ sont indépendantes.

1.b. Puis établir que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geqslant \epsilon_1 + \epsilon_2\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \epsilon_1\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geqslant \epsilon_2\right).$$

Pour la suite de cette partie, on admettra le résultat suivant : pour tous entiers strictement positifs, n et q, $\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i$ et $\sum_{i=1}^{q} X_i$ ont la même loi et donc la même fonction de répartition.

2. Soit $\epsilon > 0$. On pose pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \geqslant \epsilon\right).$$

Prouver que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $q \geqslant 1$,

$$u_{n+q} \geqslant u_n u_q.$$

Dans toute la suite de cette partie, on admet qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(X - \mu \geqslant \epsilon) > 0.$$

3. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$. On pose alors $\alpha_n = -\ln(u_n)$ pour tout $n \geqslant 1$, en déduire que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $q \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \alpha_{n+q} \leqslant \alpha_n + \alpha_q.$$

4. Soit un entier $q \geqslant 1$, on pose $\beta_q = \sup\{\alpha_r,\ 1 \leqslant r < q\}$. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant q$, on a

$$\frac{\alpha_k}{k} \leqslant \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\beta_q}{k}.$$

(Indication : on pourra utiliser la division euclidienne de k par q.)

5. Pour tout entier $n \geqslant q$, on pose $S_n = \sup\left\{\frac{\alpha_k}{k},\ k \geqslant n\right\}$. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant q}$ converge vers une limite plus petite que $\frac{\alpha_q}{q}$.

6. Déduire des questions précédentes que la suite $\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge. (Indication : on pourra s'intéresser à $\inf\left\{\frac{\alpha_k}{k},\ k \geqslant 1\right\}$.)

7. Déduire des questions précédentes que la suite de terme général

$$-\frac{1}{n}\ln\left[\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right| \geqslant \epsilon\right)\right]$$

admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Puis comparez ce résultat avec celui des questions préliminaires.

Partie III

Dans cette partie, on considère X une variable à valeurs réelles de moyenne finie μ et pour laquelle il existe deux réels $x_1 < x_2$ tels que l'évènement $\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}$ est certain.

1. Soient y et z deux réels et $p \in [0; 1]$. Montrer que

$$e^{py+(1-p)z} \leqslant pe^y + (1-p)e^z.$$

2. En remarquant que $X = x_1 \frac{x_2 - X}{x_2 - x_1} + x_2 \frac{X - x_1}{x_2 - x_1}$, en déduire que, pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] \leqslant \frac{x_2 - \mu}{x_2 - x_1} e^{tx_1} + \frac{\mu - x_1}{x_2 - x_1} e^{tx_2}.$$

3. Le but de cette question est de montrer que, pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{t(X-\mu)}\right] \leqslant \exp\left(\frac{t^2(x_2 - x_1)^2}{8}\right). \tag{1}$$

Pour cela, on introduit, pour tout $t \in [0; +\infty[$,

$$g(t) = -t(\mu - x_1) + \ln\left(\frac{x_2 - \mu + (\mu - x_1)e^{t(x_2 - x_1)}}{x_2 - x_1}\right) - \frac{(x_2 - x_1)^2 t^2}{8}.$$

3.a. Vérifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; +\infty[$ et donner ses dérivées d'ordres 1 et 2.

3.b. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $g''(t) \leqslant 0$ et en déduire le résultat (1) pour tout $t \geqslant 0$.

3.c. Conclure.

4. Soit n un entier strictement positif. Pour la dernière question de cette partie, on introduit un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

4.a. Soit $\epsilon > 0$, en utilisant le résultat de la question précédente, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{2n\epsilon^2}{(x_2 - x_1)^2}\right).$$

4.b. On veut finalement définir un intervalle de confiance. Soit $\alpha \in]0; 1[$, expliciter un réel v, dépendant des paramètres et de α, tel que

$$\mathbb{P}\left(\mu \in \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - v; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k + v\right]\right) \geqslant 1 - \alpha.$$

Partie IV

Comparer les résultats des parties II et III puis les résultats des parties I et III.

Fin de l'épreuve