

# DEVOIR MAISON N° 13

À RENDRE LE 26 JANVIER 2026

---

## EXERCICE 1 : SUJET ORAL AGRO-VÉTO

### Rappel : algorithme de dichotomie

On considère une fonction  $g$  continue sur un intervalle  $[a; b]$ . On suppose que  $g$  s'annule exactement une fois sur  $[a; b]$  en un point que l'on note  $\alpha$ .

On définit les suites  $(a_k)_{k \geq 0}$  et  $(b_k)_{k \geq 0}$  de la façon suivante :

—  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .

— Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  et :

si  $g(a_k)g(c_k) \leq 0$  alors  $a_{k+1} = a_k$  et  $b_{k+1} = c_k$   
sinon  $a_{k+1} = c_k$  et  $b_{k+1} = b_k$ .

On sait alors que les suites  $(a_k)_{k \geq 0}$  et  $(b_k)_{k \geq 0}$  convergent toutes les deux vers  $\alpha$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution notée  $\alpha$ .
2. En utilisant des valeurs approchées de  $\ln(2)$  et  $\ln(3)$  à l'aide de Python, justifier que  $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ .
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier  $n$  et qui renvoie une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-n}$  près.
4. Soit  $\Phi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(1+x)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que  $\Phi$  est une densité de probabilité.

5. Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t) dt$  converge absolument.
6. Montrer que  $\forall t > \alpha, f'(t) = t\Phi(t) - \frac{1}{t^2}$ .
7. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $\Phi$  pour densité. Calculer l'espérance de  $X$  de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

## EXERCICE 2 : FACULTATIF : TYPE ENS

On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est à **variation lente** si :

$$\text{pour tout } c > 0 \text{ on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$$

Les trois parties qui suivent sont indépendantes entre elles.

### Première partie.

1. Montrer que la fonction  $\ln$  est à variation lente.
2. On suppose qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}^*$  tel que  $f(x) \rightarrow \ell$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .  
Montrer que  $f$  est à variation lente.
3. On suppose que  $f(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . La fonction  $f$  est-elle toujours à variation lente ?

### Deuxième partie.

On fixe une constante  $a > 0$  et une fonction continue  $h : [2; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant

$$\text{pour tout } x \geq 2, \quad f(x) = a \exp \left( \int_2^x \frac{h(u)}{u} du \right). \quad (1)$$

4. Montrer que  $h(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$  pour tout  $x \geq 2$ .

#### 5. Un exemple

- a) En s'aidant de la question (4), donner une écriture de  $\ln(x)$  sous la forme

$$\ln(x) = a \exp \left( \int_2^x \frac{h(u)}{u} du \right) \text{ pour } x \geq 2 \quad (2)$$

avec  $a > 0$  et  $h : [2; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $h(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ .

- b) Pour quelles valeurs de  $x < 2$  peut-on prolonger l'égalité (2) de la question précédente ? Justifier votre réponse.
6. On revient au cas d'une fonction  $f$  générale de la forme (1) donnée au début de cette partie.
    - a) Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe une constante  $C > 0$  telle que  $f(x) \leq Cx^\varepsilon$  pour tout  $x \geq 2$ .  
*Indication.* On pourra fixer  $M > 0$  tel que  $|h(u)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \geq M$ , et couper l'intégrale en deux.
    - b) Montrer que pour tout  $c > 0$ ,  $\int_x^{cx} \frac{h(u)}{u} du \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .
    - c) Montrer que  $f$  est à variation lente.

### Troisième partie.

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle à support dans  $\mathbb{R}_+^*$ . On suppose que sa fonction de répartition est continue. On pose  $\bar{F}(u) = \mathbb{P}(X \geq u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .

7. Justifier que  $\bar{F}$  est continue.
8. a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , il existe un nombre réel  $a_n \geq 0$  tel que  $\bar{F}(a_n) = \frac{1}{n}$ .

- b) On suppose, uniquement dans cette question, que  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Déterminer la valeur de  $a_n$ .
- c) On suppose que  $X$  admet une espérance. Montrer que  $\mathbb{E}[X] \geq \frac{a_n}{n}$ .
- d) On suppose que  $\frac{a_n}{n} \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $X$  n'admet pas d'espérance.

Afin de modéliser des phénomènes aléatoires extrêmes, on suppose à présent qu'il existe un nombre réel  $\alpha > 0$  et une fonction à variation lente  $g$  tels que  $\bar{F}(u) = \frac{g(u)}{u^\alpha}$  pour tout  $u > 0$ . On suppose également que  $a_n \rightarrow +\infty$ .

9. Montrer que pour tout  $u > 0$ ,  $\mathbb{P}(X \geq ua_n) \sim \frac{1}{u^\alpha n}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .
10. Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  des variables aléatoires indépendantes de même loi que  $X$ . Déterminer, pour  $u > 0$  fixé, la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{a_n} \geq u \right)$$