

Exercices : Variables aléatoires à densité

Généralités

EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{3}{2}e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

Cette fonction est-elle une densité de probabilité? Si oui, déterminer la fonction de répartition de la VAR associée à cette densité.

On pourra, si besoin, utiliser le changement de variable $u = e^{-t/2}$.

EXERCICE 2 :

1. Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

2. Soit G la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$.

Montrer que G est la fonction de répartition d'une variable à densité et déterminer une densité de cette variable aléatoire.

EXERCICE 3 :

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} c(1-x)^{1/3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur c pour que f soit une densité de probabilité.

On suppose maintenant que la condition sur c est satisfaite et on note Y une variable aléatoire réelle dont une densité est f .

2. Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable Y . Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Y dans un repère orthonormal.
3. Calculer l'espérance de la variable Y .
4. a) Calculer la probabilité de l'événement $[0, 488 < Y \leq 1, 2]$.
b) Calculer $P(Y(15 - 9Y) \leq 4)$.

Indication : on pourra s'intéresser au tableau de signe du trinôme $9x^2 - 15x + 4$.

EXERCICE 4 :

Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de la variable X dont une densité est :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{4 \ln t}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

Lois usuelles

EXERCICE 5 :

Soit X et Y deux variables aléatoire réelle indépendantes suivant respectivement la loi uniforme sur $] -1; 1[$ et la loi exponentielle de paramètre 2.

Calculer $P(X(Y - 2) > 0)$.

EXERCICE 6 :

À l'aide de vos connaissances sur la loi normale calculer les intégrales suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-3x^2+x+1} dx ; \\ 2. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2-x} dx ; \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2+6x-9} dx ; \\ 4. \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-4x^2+ux} dx \text{ avec } u \in \mathbb{R} \text{ fixé.} \end{array}$$

EXERCICE 7 :

On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

Calculer une valeur approchée de la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi qu'une valeur approchée de l'écart-type de cette longueur.

Fonction d'une variable à densité

EXERCICE 8 : FAIRE SES GAMMES

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Montrer que la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$ est une variable à densité et en déterminer une densité.

EXERCICE 9 :

Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
2. On pose $Y = |X|$. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y puis montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y .

Minimum ou maximum de 2 ou n variables

EXERCICE 10 :

1. Simulation informatique

- a) Soit U une variable suivant la loi uniforme sur $]0; 1[$ et a et b deux réels tels que $a < b$. On considère $X = a + (b - a)U$. Quelle est la loi de X ?
- b) Écrire une fonction Python `uniforme(a,b)` simulant la réalisation d'une VAR X qui suit une loi uniforme sur $]a; b[$.

2. Minimum de VAR à densité : soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_0, \dots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $]1; 3[$. On pose $U_k = \min(X_0, \dots, X_k)$.

- a) Écrire une fonction Python `simulation(k)` simulant une réalisation de la variable aléatoire U_k .
- b) Écrire une fonction Python `esperance(k)` qui calcule et affiche une valeur approchée de l'espérance de U_k si celle-ci existe.
- c) Déterminer la loi de U_k .

EXERCICE 11 : ORAL AGRO-VÉTO

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X .

3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0; 1[$.

Montrer que la variable aléatoire $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$ suit la même loi que X .

4. Écrire un programme Python simulant une réalisation de la variable aléatoire X .
5. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?
Si oui, les calculer, et vérifier vos réponses à l'aide du programme de la question 4.
6. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X .
On définit, pour tout entier n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de T_n .
- b) Calculer alors pour tout réel x : $G(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n \leq x)$.
- c) Montrer que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité.
- d) Montrer que T admet pour densité la fonction g donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- e) À l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que T admet une espérance et la déterminer.

Somme de variables à densité

EXERCICE 12 : FAIRE SES GAMMES

Soit X et Y deux VAR à densité indépendantes de densités respectives f_X et f_Y définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & \text{si } x \in [1; 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2} & \text{si } x \in [-2; 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

EXERCICE 13 : ORAL G2E

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X et Y suivent les loi exponentielles de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivement.

On rappelle que si U et V sont des variables aléatoires à densités indépendantes, dont des densités respectives sont f_U et f_V , alors $W = U + V$ est une variable à densité dont une densité de probabilité est la fonction f_W définie par :

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x)f_V(w-x) \, dx.$$

1. Déterminer la loi de $I = \min(X, Y)$.
2.
 - a) Déterminer une densité de $D = X - Y$.
 - b) Calculer la probabilité $P(X > Y)$.
 - c) La variable aléatoire $X - Y$ admet-elle une espérance ? une variance ?

EXERCICE 14 : ORAL AGRO-VÉTO

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles à densité et indépendantes, alors $S + T$ est une variable à densité dont une densité est donnée par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{S+T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(t)f_T(x-t)dt$$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0, 1[$.

1.
 - a) Donner la loi de $Y = -\ln(X)$.
 - b) Modéliser informatiquement une loi exponentielle de paramètre 1.
2. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi exponentielle de paramètre 1. Notons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (avec $S_0 = 0$).

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est une variables aléatoire de densité f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.
 - a) Soient $a > 0$ et $Z = \sup\{k \in \mathbb{N} / S_k \leq a\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\overline{(Z = n)} = (S_n > a) \cup (S_{n+1} \leq a).$$

- b) Donner la loi de Z .
4. Modéliser informatiquement une loi de Poisson de paramètre $a > 0$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 15 :

Soit X une VAR admettant une densité f . On suppose que X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X).

1. Déterminer la loi de Y . (On donnera un résultat exprimé en fonction de f .)
2.
 - a) Montrer que $E(Y)$ existe si, et seulement si, $E(X)$ existe.
 - b) Montrer que si $E(X)$ existe alors : $E(Y) \leq E(X) \leq E(Y) + 1$.

EXERCICE 16 :

Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$.

Quelle remarque pouvez-vous faire sur ce résultat d'un point de vue informatique ?

Correction

CORRECTION DE L'EXERCICE 1 :

- (i) On remarque tout d'abord que f est bien une fonction à valeurs positive car $0 \geq 0$ et pour $t \geq 0$, $\frac{3}{2}e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2 \geq 0$.
- (ii) La fonction nulle est continue sur $] - \infty; 0[$ et par produit de fonctions continues, la fonction $t \mapsto \frac{3}{2}e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2$ est continue sur $]0; +\infty[$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- (iii) Sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} \frac{3}{2}e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2 dt.$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^0 0 dt$ est évidemment convergente et vaut 0.

La fonction $t \mapsto \frac{3}{2}e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc

$\int_0^{+\infty} \frac{3}{2}e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2 dt$ est impropre en $+\infty$.

Soit $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{3}{2}e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2 dt = \left[(1 - e^{-t/2})^3\right]_0^A = (1 - e^{-A/2})^3.$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A/2})^3 = 1$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{3}{2}e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2 dt$ est convergente et vaut 1.

En conclusion $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut 1.

Ainsi, f est une densité de probabilité.

Soit X une VAR de densité f . Notons F_X sa fonction de répartition. Par définition

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Si $x < 0$ alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

Si $x \geq 0$ alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt + \int_0^x \frac{3}{2}e^{-t/2} \left(1 - e^{-t/2}\right)^2 dt = (1 - e^{-x/2})^3$. (Inutile de refaire le calcul, il a été fait dans le point (iii).)

En conclusion, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x/2})^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2 :

1. (i) La fonction nulle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty; 1]$ et par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction $x \mapsto 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$. Donc F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- (ii) Comme F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, F_X est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
De plus $\lim_{1^-} F_X = 0 = \lim_{1^+} F_X = F_X(1)$ donc F_X est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

X est donc bien une variable à densité.

On sait qu'une densité de X vérifie, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f_X(x) = F'_X(x)$. On complète en 1 par une valeur arbitraire positive.

Une densité de X est par exemple définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2. (i) La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ et dont le dénominateur ne s'annule pas.
- (ii) La fonction G est donc aussi continue sur $\mathbb{R}$.
- (iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \frac{e^x(e^x + e^{-x}) - e^x(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$.

Donc G est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$.

De plus, par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$.

En conclusion, G est la fonction de répartition d'une VAR à densité.

Pour déterminer une densité d'une variable aléatoire associée à G il suffit de dériver G là où elle est dérivable et de compléter les valeurs manquantes par une valeur positive ou nulle.

Une densité d'une VAR associée à G est par exemple la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 3 :

1. (i) On remarque tout d'abord que f est une fonction à valeurs positives si, et seulement si, $c \geq 0$, car pour $x \notin [0; 1]$ on a $f(x) = 0 \geq 0$ et si $x \in [0; 1]$, $(1 - x) \geq 0$.
- (ii) f est bien continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$ car f est la fonction nulle sur ces intervalles.
Sur $]0; 1[$ f est la composée de fonctions continues donc f est continue.
Donc, quelle que soit la valeur de c , f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.
- (iii) Sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^0 0 \, dx + \int_0^1 c(1-x)^{1/3} \, dx + \int_1^{+\infty} 0 \, dx.$$

Les intégrales $\int_{-\infty}^0 0 \, dx$ et $\int_1^{+\infty} 0 \, dx$ sont évidemment convergentes et valent 0.

La fonction $x \mapsto c(1-x)^{1/3}$ est continue sur $[0; 1]$ donc l'intégrale $\int_0^1 c(1-x)^{1/3} \, dx$ n'est pas impropre donc elle est convergence. De plus :

$$\int_0^1 c(1-x)^{1/3} \, dx = c \left[-\frac{3}{4}(1-x)^{4/3} \right]_0^1 = \frac{3c}{4}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \frac{3c}{4}$.

Cette intégrale est égale à 1 si, et seulement si, $c = \frac{4}{3}$.

Ainsi, f est une densité de probabilité si, et seulement si, $c = \frac{4}{3}$.

2. Par définition $F_Y(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$.

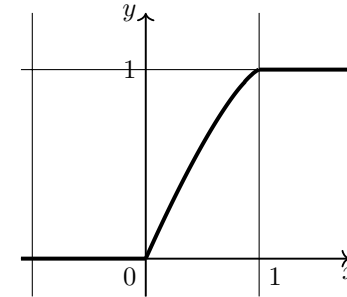
Si $x < 0$, $F_Y(x) = \int_{-\infty}^x 0 \, dt = 0$.

Si $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \int_{-\infty}^0 0 \, dt + \int_0^x \frac{4}{3}(1-t)^{1/3} \, dt \\ &= 1 - (1-x)^{4/3}. \end{aligned}$$

Si $x > 1$, $F_Y(x) = \int_{-\infty}^0 0 \, dt + \int_0^1 \frac{4}{3}(1-t)^{1/3} \, dt + \int_1^x 0 \, dt = 1$.

En résumé, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^{4/3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



3. Une densité de Y est nulle en dehors du segment $[0; 1]$ donc, d'après le cours, Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \, dx = \int_0^1 \frac{4}{3}x(1-x)^{1/3} \, dx \\ &= \left[-x(1-x)^{4/3} \right]_0^1 + \int_0^1 (1-x)^{4/3} \, dx = \left[-\frac{3}{7}(1-x)^{7/3} \right]_0^1 = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$$E(Y) = \frac{3}{7}.$$

4. a)

$$\begin{aligned} P(0,488 < Y \leq 1,2) &= F_Y(1,2) - F_Y(0,488) \\ &= 1 - \left(1 - (1 - 0,488)^{4/3} \right) \\ &= (0,512)^{4/3} = 0,4096 \end{aligned}$$

- b) On peut remarquer que

$$P(Y(15 - 9Y) \leq 4) = P(9Y^2 - 15Y + 4 \geq 0).$$

Or le trinôme $9x^2 - 15x + 4$ est positif si, et seulement si $x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty \right[$.

Donc

$$P(Y(15 - 9Y) \leq 4) = P\left(\left[Y \leq \frac{1}{3}\right] \cup \left[Y \geq \frac{4}{3}\right]\right).$$

On a ici une union de deux événements disjoints donc :

$$\begin{aligned}
 P(Y(15 - 9Y) \leq 4) &= P\left(Y \leq \frac{1}{3}\right) + P\left(Y \geq \frac{4}{3}\right) \\
 &= F_Y\left(\frac{1}{3}\right) + 1 - P\left(Y < \frac{4}{3}\right) \\
 &= F_Y\left(\frac{1}{3}\right) + 1 - P\left(Y \leq \frac{4}{3}\right) \quad \text{car VAR à densité} \\
 &= F_Y\left(\frac{1}{3}\right) + 1 - F_Y\left(\frac{4}{3}\right) \\
 &= 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4/3} + 1 - 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{4/3}.
 \end{aligned}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 4 :

Espérance : Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} th(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^1 0 dt}_{\text{convergente et } =0} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{4 \ln(t)}{t^2} dt}_{\text{impropre en } +\infty}$$

Soit $A > 1$, par intégration par parties (à rédiger proprement) :

$$\begin{aligned}
 \int_1^A \frac{4 \ln(t)}{t^2} dt &= \left[-\frac{4 \ln(t)}{t} \right]_1^A + \int_1^A \frac{4}{t^2} dt \\
 &= -\frac{4 \ln(A)}{A} - \frac{4}{A} + 4 \\
 &\rightarrow 4 \text{ quand } A \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{4 \ln(t)}{t^2} dt$ est convergente et vaut 4.

X admet donc une espérance et $E(X) = 4$.

Variance : Regardons maintenant si X admet un moment d'ordre 2.

Sous réserve de convergence :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 h(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^1 0 dt}_{\text{convergente et } =0} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{4 \ln(t)}{t} dt}_{\text{impropre en } +\infty}$$

Soit $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{4 \ln(t)}{t} dt = [2(\ln(t))^2]_1^A = 2(\ln(A))^2 \rightarrow +\infty \text{ quand } A \rightarrow +\infty.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{4 \ln(t)}{t} dt$ est divergente.

X n'admet donc pas de moment d'ordre 2 et donc X n'admet pas de variance.

CORRECTION DE L'EXERCICE 5 :

On rappelle que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 P(X(Y - 2) > 0) &= P((([X > 0] \cap [Y > 2]) \cup ([X < 0] \cap [Y < 2]))) && \text{pté des réels} \\
 &= P([X > 0] \cap [Y > 2]) + P([X < 0] \cap [Y < 2]) && \text{evt disjoints} \\
 &= P(X > 0)P(Y > 2) + P(X < 0)P(Y < 2) && \text{VAR indépendantes} \\
 &= (1 - F_X(0))(1 - F_Y(2)) + F_X(0)F_Y(2) && \text{VAR à densité} \\
 &= \frac{e^{-4}}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-4}) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 6 :

1.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-3x^2+x+1} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-3(x-\frac{1}{6})^2+\frac{13}{12}} dx \\
 &= e^{13/12} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-1/6)^2}{2 \times \frac{1}{6}}} dx \\
 &= e^{13/12} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1/6)^2}{2 \times \frac{1}{6}}} dx \\
 &= e^{13/12} \times \sqrt{\frac{\pi}{3}} E(X) \quad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \\
 &= e^{13/12} \times \sqrt{\frac{\pi}{3}} \times \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2-x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]} dx \\
&= e^{1/8} \times \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1/4)^2}{2 \times 1/4}} dx \\
&= e^{1/8} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \quad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{1/8}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2+6x-9} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(x-3)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \times \frac{1}{2}}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \times \frac{1}{2}}} dx \\
&= \sqrt{\pi} E(X^2) \quad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(3, \frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{\pi} (V(X) + E(X)^2) = \frac{19}{2} \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-4x^2+ux} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-4\left(x-\frac{u}{8}\right)^2+\frac{u^2}{16}} dx \\
&= e^{u^2/16} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-u/8)^2}{2 \times \frac{1}{8}}} dx \\
&= e^{u^2/16} \times \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u/8)^2}{2 \times \frac{1}{8}}} dx \\
&= e^{u^2/16} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} E(X) \quad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{u}{8}, \frac{1}{8}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{16} u e^{u^2/16}.
\end{aligned}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 7 :

Notons X la VAR égale à la distance parcourue par le javelot. D'après l'énoncé, X suit une loi normale de paramètres m et σ^2 .

Le but de cet exercice est de trouver m et σ .

L'énoncé nous dit que :

$$P(X > 75) = 0,1 \quad \text{et} \quad P(X < 50) = 0,25$$

On sait d'après le cours que lorsque X suit une loi normale de paramètres m et σ alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale de paramètres 0 et 1.

Or

$$\begin{aligned}
P(X > 75) &= P(X - m > 75 - m) \\
&= P\left(\frac{X - m}{\sigma} > \frac{75 - m}{\sigma}\right) \\
&= P\left(X^* > \frac{75 - m}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{75 - m}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

$$\text{On a donc } 1 - \Phi\left(\frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,9.$$

$$\text{Grâce à notre calculatrice on trouve : } \frac{75 - m}{\sigma} \approx 1,28.$$

$$\text{De même } P(X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - m}{\sigma}\right) = 0,25.$$

$$\text{Toujours grâce à la calculatrice, on trouve } \frac{50 - m}{\sigma} \approx -0,67.$$

Il nous faut donc maintenant résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{75 - m}{\sigma} \approx 1,28 \\ \frac{50 - m}{\sigma} \approx -0,67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75 - m \approx 1,28\sigma \\ 50 - m \approx -0,67\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \approx 58,59 \\ \sigma \approx 12,82 \end{cases}$$

La longueur moyenne parcourue par le javelot est 58,69 et l'écart type est 12,82.

CORRECTION DE L'EXERCICE 8 :

On rappelle que la fonction de répartition d'une VAR X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On a donc $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et on en déduit que $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

Notons F_Y la fonction de répartition de Y . Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x)$.

Si $x < 0$, l'événement $[Y \leq x]$ est impossible donc $F_Y(x) = 0$.

Si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(\sqrt{X} \leq x) \\ &= P(X \leq x^2) && \text{fonction carré strict. croiss. sur } \mathbb{R}^+ \\ &= F_X(x^2) \\ &= 1 - e^{-\lambda x^2} && \text{car } x^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

La fonction $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; 0[$ et la fonction $x \mapsto 1 - e^{-\lambda x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

Donc F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

F_Y est aussi continue sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y = 0 = F_Y(0)$. Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc Y est bien une variable à densité. Pour obtenir une densité de Y on dérive F_Y là où c'est possible et on complète les points manquants par une valeur arbitraire positive. Une densité de Y est donc par exemple la fonction f_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 9 :

$$1. \text{ Par définition } F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$\text{Si } x < -\ln 2 \text{ alors } F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

Si $-\ln 2 \leq x < 0$ alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-\ln(2)} 0 dt + \int_{-\ln(2)}^x e^{-(-t)} dt = [e^t]_{-\ln 2}^x = e^x - \frac{1}{2}.$$

Si $0 \leq x \leq \ln 2$ alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-\ln(2)} 0 dt + \int_{-\ln(2)}^0 e^{-(-t)} dt + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= [e^t]_{-\ln 2}^0 + [-e^{-t}]_0^x \\ &= 1 - \frac{1}{2} - e^{-x} + 1 = \frac{3}{2} - e^{-x}. \end{aligned}$$

Si $x > \ln 2$ alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-\ln(2)} 0 dt + \int_{-\ln(2)}^0 e^{-(-t)} dt + \int_0^{\ln(2)} e^{-t} dt + \int_{\ln(2)}^x 0 dt \\ &= [e^t]_{-\ln 2}^0 + [-e^{-t}]_0^{\ln 2} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln 2 \\ e^x - \frac{1}{2} & \text{si } -\ln 2 \leq x < 0 \\ \frac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln 2 \\ 1 & \text{si } x > \ln 2 \end{cases}$$

2. On remarque que $X(\Omega) = [-\ln(2); \ln(2)]$ donc $Y(\Omega) = [0; \ln(2)]$.

Par définition $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x)$.

Si $x < 0$, l'événement $[|X| \leq x]$ est impossible donc $F_Y(x) = 0$ et si $x > \ln(2)$, l'événement $[|X| \leq x]$ est certain donc $F_Y(x) = 1$.

Si $x \in [0; \ln(2)]$ alors $P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x)$.

$$\text{Donc } F_Y(x) = \frac{3}{2} - e^{-x} - e^{-x} + \frac{1}{2} = 2(1 - e^{-x}).$$

$$\text{On a, en résumé, } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2(1 - e^{-x}) & \text{si } 0 \leq x \leq \ln 2 \\ 1 & \text{si } x > \ln 2 \end{cases}.$$

Je vous laisse montrer que F_Y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \ln 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.

Y est donc bien une variable à densité. Pour obtenir une densité de Y on dérive F_Y là où c'est possible et on complète les points manquants par une valeur arbitraire positive. Une densité de Y est donc par exemple la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & \text{si } x \in [0; \ln 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 10 :

1. a) Comme $U(\Omega) =]0; 1[$, on en déduit que $X(\Omega) =]a; b[$.

Notons F la fonction de répartition de U et G celle de X .

Grâce à $X(\Omega)$, on peut dire que si $x \leq a$, $G(x) = 0$ et si $x \geq b$, $G(x) = 1$. Pour $x \in]a; b[$:

$$\begin{aligned} G(x) &= P(X \leq x) = P(a + (b - a)U \leq x) \\ &= P((b - a)U \leq x - a) \\ &= P\left(U \leq \frac{x - a}{b - a}\right) \quad \text{car } b - a > 0. \\ &= F\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or on sait que } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 < t < 1. \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc si } a < x < b, \text{ alors } G(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

$$\text{En résumé, on a } G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{si } a < x < b. \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Ainsi X suit la loi uniforme sur $]a; b[$.

b) `def uniforme(a,b):`
`return a+(b-a)*random()`

2. a) `def simulation(k):`
`return min([uniforme(1,3) for _ in range(k+1)])`

b) `def esperance(k):`
`S=0`
`for _ in range(1000):`
`S+=simulation(k)`
`return S/1000`

c) Notons F la fonction de répartition des variables X_i . Par définition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x - 1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3. \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Notons maintenant G la fonction de répartition de la variable U_k .

Par définition, pour tout réel x , $G(x) = P(U_k \leq x)$.

Or on sait que $[U_k > x] = [X_0 > x] \cap \dots \cap [X_k > x]$. Comme les variables X_i sont supposées indépendantes, on a

$$P(U_k > x) = P(X_0 > x) \times \dots \times P(X_k > x) = (1 - F(x))^{k+1}.$$

Ainsi, $G(x) = 1 - (1 - F(x))^k$.

F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

Donc par composée et différence, G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

Ainsi, U_k est une variable à densité. On obtient une densité de U_k en dérivant G là où c'est possible et en complétant les points manquants par une valeur positive ou nulle.

Une densité de U_k est par exemple la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 3 \\ \frac{k+1}{2} \left(\frac{3-x}{2}\right)^k & \text{si } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 11 :

1. Pour tout $x > 1$, $\frac{2}{x^3} \geq 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

La fonction nulle est continue sur $] -\infty; 1]$ et la fonction $x \mapsto \frac{2}{x^3}$ est continue sur $]1; +\infty[$. Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\int_{-\infty}^1 f(x) \, dx$ est évidemment convergente et nulle.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ est impropre uniquement en $+\infty$ car f est continue sur $]1; +\infty[$ et admet une limite finie en 1.

Soit $A > 1$, $\int_1^A \frac{2}{x^3} \, dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^2} \rightarrow 1$ quand A tend vers $+\infty$.

Donc $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ est convergente et vaut 1.

En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$ est convergente et vaut 1.

En conclusion, f est une densité de probabilité.

2. Par définition, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$. En reprenant les calculs fait dans la question

précédente, on a $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

3. Comme U prend ses valeurs dans $]0;1[$, on a $V(\Omega) =]1;+\infty[$.
Notons F_V la fonction de répartition de la variable aléatoire V .
On a pour $x \leq 1$, $F_V(x) = 0$ et pour tout $x > 1$:

$$F_V(x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) = P\left(\sqrt{1-U} \geq \frac{1}{x}\right) = P\left(1-U \geq \frac{1}{x^2}\right),$$

car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$$\text{On a donc } F_V(x) = P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x^2}\right) = F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Comme $x > 1$, $1 - \frac{1}{x^2} \in]0;1[$, on obtient que $F_V(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

$$\text{Ainsi, } F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} = F_X(x).$$

Donc V suit la même loi que X .

4.

```
from random import random
from math import sqrt
```

```
def simulX():
    return 1/sqrt(1-random())
```

5. Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^1 0 \, dx}_{\text{cv et } =0} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} \, dx}_{\text{impropre en } +\infty}.$$

Soit $A > 1$, $\int_1^A \frac{2}{x^2} \, dx = 2 - \frac{2}{A} \rightarrow 2$ quand A tend vers $+\infty$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} \, dx$ est convergente et vaut 2.

En conclusion, X admet une espérance et $E(X) = 2$.

Sous réserve de convergence :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^1 0 \, dx}_{\text{cv et } =0} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{2}{x} \, dx}_{\text{impropre en } +\infty}.$$

Or $\int_1^A \frac{2}{x} \, dx = 2 \ln(A) \rightarrow +\infty$ quand A tend vers $+\infty$.

Donc X n'admet pas de variance.

```
def EspX():
    S=0
    for k in range(1000):
        S+=simulX()
    return S/1000
```

Cette fonction renvoie bien une valeur proche de 2.

La fonction suivante montre la divergence de la moyenne des valeurs de X^2 en renvoyant une liste avec des valeurs très très variables :

```
def NonVariance():
    L=[]
    for i in range(15):
        V=0
        for k in range(10000):
            V+=simulX()**2
        L.append(V/10000)
    return L
```

6. a) Les variables X_i étant à valeurs dans $]1;+\infty[$, on a $T_n(\Omega) = \left] \frac{1}{\sqrt{n}}; +\infty \right[$.

Pour $x \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a donc $F_{T_n}(x) = 0$.

Soit $x > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x\sqrt{n}) \\ &= P([X_1 \leq x\sqrt{n}] \cap \dots \cap [X_n \leq x\sqrt{n}]) \\ &= P(X \leq x\sqrt{n})^n \quad \text{variables indépendantes de même loi} \\ &= \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{En résumé } F_{T_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- b) Soit $x > 0$ fixé. Pour n assez grand on a $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$$P(T_n \leq x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \rightarrow e^{-1/x^2}.$$

Pour $x \leq 0$, $P(T_n \leq x) = 0$.

$$\text{Donc en résumé : } G(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- c) (i) La fonction $x \mapsto 0$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- (ii) Par conséquent la fonction G est aussi continue sur $\mathbb{R}^*$.
De plus $\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0)$ donc G est continue sur $\mathbb{R}$.
- (iii) La fonction G est constante sur $\mathbb{R}^-$ et, pour $x > 0$, $G'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} > 0$ donc G est croissante sur $]0; +\infty[$.
Comme G est continue sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que G est croissante sur $\mathbb{R}$.
- (iv) Il est évident que $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$ et par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$.
- Ainsi, G est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité T .
- d) Pour obtenir une densité de T il suffit de dériver G sur $\mathbb{R}^*$ et de choisir arbitrairement une valeur positive en 0. On obtient bien la fonction donnée.
- e) Sous réserve de convergence

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dx}_{\text{cv et } =0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2} e^{-1/x^2} dx}_{\text{impropre en } 0 \text{ et } +\infty}$$

On pose $x = \frac{1}{u} \Leftrightarrow u = \frac{1}{x}$. la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, strictement décroissant et à valeurs dans $]0; +\infty[$. De plus $dx = -\frac{1}{u^2} du$.
D'après le théorème de changement de variable généralisé, toujours sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} dx &= \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du && u \mapsto e^{-u^2} \text{ est paire} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2 \times \frac{1}{2}}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u) du && \text{avec } Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Donc T admet une espérance et $E(T) = \sqrt{\pi}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 12 :

X et Y étant deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes, on peut affirmer que Z est une variable à densité et, d'après la formule du cours, une densité de Z est la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a donc :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{3} \mathbb{1}_{[1;2]}(t) \times \frac{t-x}{2} \mathbb{1}_{[-2;0]}(x-t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} t(t-x) \mathbb{1}_{[1;2]}(t) \times \mathbb{1}_{[x;x+2]}(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} t(t-x) \mathbb{1}_{[1;2] \cap [x;x+2]}(t) dt. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant mettre en place une discussion suivant la valeur de x pour déterminer la valeur de $[1;2] \cap [x;x+2]$.

— Si $x < 1$ et $x+2 < 1$ (ce qui correspond à $x < -1$), $[1;2] \cap [x;x+2] = \emptyset$, donc

$$h(x) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dt = 0.$$

— Si $x < 1$ et $1 \leq x+2 \leq 2$ (ce qui correspond à $-1 \leq x \leq 0$), $[1;2] \cap [x;x+2] = [1;x+2]$ donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} t(t-x) \mathbb{1}_{[1;x+2]}(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_1^{x+2} t^2 - xt dt \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{xt^2}{2} \right]_1^{x+2} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x(x+2)^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

— Si $x < 1$ et $x+2 > 2$ (ce qui correspond à $0 < x < 1$),

$[1; 2] \cap [x; x+2] = [1; 2]$ donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} t(t-x) \mathbb{1}_{[1;2]}(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 t^2 - xt dt \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{xt^2}{2} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2^3}{3} - \frac{x \times 2^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{7}{9} - \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

— Si $1 \leq x \leq 2$ et $x+2 > 2$ (ce qui correspond à $1 \leq x \leq 2$),
 $[1; 2] \cap [x; x+2] = [x; 2]$ donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} t(t-x) \mathbb{1}_{[x;2]}(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_x^2 t^2 - xt dt \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{xt^2}{2} \right]_x^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2^3}{3} - \frac{x \times 2^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2} \right) \\ &= \frac{8}{9} - \frac{4x}{6} + \frac{x^3}{18}. \end{aligned}$$

— Si $x > 2$ et $x+2 > 2$ (ce qui correspond à $x > 2$), $[1; 2] \cap [x; x+2] = \emptyset$, donc

$$h(x) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dt = 0.$$

$$\text{En résumé } h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{3} \left(\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x(x+2)^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{x}{2} \right) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{7}{9} - \frac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{8}{9} - \frac{4x}{6} + \frac{x^3}{18} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 13 : CORRECTION PEU DÉTAILLÉE

$$1. P(I \leq x) = 1 - P(X > x)P(Y > x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda+\mu)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On reconnaît loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

2. a) Commençons par déterminer une densité de $-Y$:

$$-Y(\Omega) = \mathbb{R}^-, F_{-Y}(x) = \begin{cases} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, f_{-Y}(x) = \begin{cases} \mu e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

X et $-Y$ sont indépendantes (lemme des coalitions) et à densité donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_D(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t) \times \mu e^{\mu(x-t)} \mathbb{1}_{]-\infty;0]}(x-t) dt \\ &= \lambda \mu e^{\mu x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} \mathbb{1}_{[0;+\infty[\cap [x;+\infty[}(t) dt \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda \mu e^{\mu x}}{\lambda + \mu} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda \mu e^{-\lambda x}}{\lambda + \mu} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$b) P(X > Y) = P(X - Y > 0) = \int_0^{+\infty} f_D(t) dt = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

c) Linéarité de l'espérance et propriété de la variance (**variables indépendantes!!!**) :

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \quad V(X - Y) = V(X) + V(Y) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 14 :

1. a) On note F la fonction de répartition de X et G celle de Y .

Pour tout réel x , $G(x) = P(-\ln(X) \leq x) = P(X \geq e^{-x}) = 1 - F(e^{-x})$.

Si $x < 0$, $e^{-x} > 1$ donc $G(x) = 1 - 1 = 0$ et si $x \geq 0$ alors $0 \leq e^{-x} \leq 1$ et donc $G(x) = 1 - e^{-x}$.

$$\text{On a donc } G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

```
b) from math import log
from random import random
def exponentielle():
    return -log(random())
```

2. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « S_n est une variable aléatoire de densité $f_n = \begin{cases} e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans cette question on note f une densité de loi exponentielle de paramètre 1.

— On a $S_1 = X_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est bien vérifiée car f_1 est la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1 est X_1 suit bien une loi exponentielle de paramètre 1.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On a alors $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Comme les variables (X_i) sont mutuellement indépendantes, les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes donc, d'après le résultat rappelé, S_{n+1} est une variable à densité de densité :

$$f_{S_{n+1}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)f(x-t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \times f(x-t) dt.$$

Si $x < 0$, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f(x-t) = 0$ donc $f_{S_{n+1}}(x) = 0$.

Si $x > 0$,

$$f_{S_{n+1}}(x) = \int_0^x e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \times e^{-(x-t)} dt = e^{-x} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = e^{-x} \frac{x^n}{n!}.$$

Donc $f_{S_{n+1}} = f_{n+1}$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vraie.

On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ vraie.

3. a) Par définition de Z l'événement $[Z = n]$ signifie que n est le plus grand entier tel que $S_k \leq a$. Comme $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ et que les X_i sont à valeurs positives on a $S_{k+1} \geq S_k$.

On a donc $[Z = n] = [S_n \leq a] \cap [S_{n+1} > a]$.

On a donc $[\overline{Z = n}] = [S_n > a] \cup [S_{n+1} \leq a]$.

b) On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, on remarque que les événements $[S_n > a]$ et $[S_{n+1} \leq a]$ sont incompatibles.

Donc $P(\overline{[Z = n]}) = P(S_n > a) + P(S_{n+1} \leq a)$.

De plus $P(S_n > a) = \int_a^{+\infty} f_n(t) dt$ et, par IPP :

$$P(S_{n+1} \leq a) = \int_0^a e^{-t} \frac{t^n}{n!} dt = \left[-e^{-t} \frac{t^n}{n!} \right]_0^a + \int_0^a f_n(t) dt.$$

$$\text{Donc } P(\overline{[Z = n]}) = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt - e^{-a} \frac{a^n}{n!} = 1 - e^{-a} \frac{a^n}{n!}.$$

$$\text{Ainsi } P(Z = n) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}. \quad Z \hookrightarrow \mathcal{P}(a).$$

```
4. def poisson(a):
    k=0
    S=0
    while S<=a:
        S+=exponentielle()
        k+=1
    return k-1
```

CORRECTION DE L'EXERCICE 15 :

1. Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Y = k) = P(\lfloor X \rfloor = k) = P(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} f(t) dt$$

2. a) On a ici une équivalence à démontrer donc on va montrer les deux implications.
 $\Rightarrow$: Supposons que Y admet une espérance. Cela signifie que la série $\sum kP(Y = k)$ est absolument convergente.

Comme f est nulle sur $] -\infty; 0[$, $\int_{-\infty}^0 tf(t) dt$ est convergente et vaut 0.

$\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ est impropre en $+\infty$.

De plus, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, montrer que $\int_0^A tf(t) dt$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$ est équivalent à

montrer que $\int_0^n tf(t) dt$ admet une limite finie lorsque $n \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$.

On remarque alors que

$$\int_0^n tf(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} tf(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(Y = k) \leq E(Y) + 1.$$

La suite $\left(\int_0^n tf(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée. Elle admet donc une limite finie.

Ainsi $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente.

En conclusion X admet une espérance.

$\Leftarrow$: Supposons que X admet une espérance, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente.

On veut montrer que la série $\sum kP(Y = k)$ est absolument convergente (série à termes positifs donc convergence = convergence absolue).

Comme cette série est à termes positifs, il suffit de montrer que ses sommes partielles sont majorée pour dire qu'elle est convergente.

On remarque que pour tout entier k , $k \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} tf(t) dt$.

Donc pour tout entier n , $\sum_{k=0}^n kP(Y = k) \leq \int_0^{n+1} tf(t) dt \leq E(X)$.

Les sommes partielles sont bien majorée, donc la série $\sum kP(Y = k)$ est (absolument) convergente et ainsi Y admet une espérance.

b) Supposons que $E(X)$ existe (alors $E(Y)$ existe). On a vu que

$$\begin{aligned} k \int_k^{k+1} f(t) dt &\leq \int_k^{k+1} tf(t) dt \leq k \int_k^{k+1} f(t) dt + \int_k^{k+1} f(t) dt \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k \int_k^{k+1} f(t) dt &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} tf(t) dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} k \int_k^{k+1} f(t) dt + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t) dt \\ \Rightarrow E(Y) &\leq E(X) \leq E(Y) + 1 \end{aligned}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 16 :

F est strictement croissante d'après les hypothèses de l'énoncé et est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable **à densité**. Donc d'après le théorème de bijection monotone, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{-\infty} F; \lim_{+\infty} F[=]0; 1[$.

Comme F n'est jamais constante, on peut affirmer que $X(\Omega) = \mathbb{R}$. On en déduit donc que $Y(\Omega) =]0; 1[$.

Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(F(X) \leq x)$.

- Si $x < 0$, l'événement $[F(X) \leq x]$ est impossible donc $F_Y(x) = 0$.
- Si $x > 1$ alors $F_Y(x) = 1$ car l'événement $[F(X) \leq x]$ est certain.
- Si $0 \leq x \leq 1$ alors, comme F^{-1} est croissante, $F_Y(x) = P(F(X) \leq x) = P(X \leq F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$.

$$\text{On a donc } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

On reconnait ici la fonction de répartition d'une VAR qui suit une loi uniforme sur $]0; 1[$. $Y = F(X)$ suit une loi uniforme sur $]0; 1[$.

On peut donc remarquer que toute variable aléatoire X ayant une fonction de répartition bijective peut s'écrire en fonction d'une variable U suivant la loi uniforme sur $]0; 1[$:

$$X = F^{-1}(U) \text{ avec } F \text{ fonction de répartition de } X.$$

Cela permet de simuler informatiquement un grand nombre de VAR à densité à l'aide de la fonction `random()` de la bibliothèque `random`.