G2E 2021
Correction

Problème 1 :

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. a) Pour tout réel x : $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

   b) L'équation différentielle homogène associée à (E) est $(1+e^x)y' - y = 0$.
   Comme $1+e^x$ ne s'annule jamais, cette équation peut s'écrire $y' - \dfrac{1}{e^x+1}y = 0$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ on sait que l'ensemble des solution de cette équation homogène est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$ où A est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ et C un réel quelconque.
   D'après la question précédente, on peut choisir $A(x) = -\ln(1+e^{-x})$.
   Les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{C}{1+e^{-x}}$ où C est un réel quelconque.

2. a) On cherche une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $y_p : x \mapsto \dfrac{u(x)}{1+e^{-x}} = \dfrac{u(x)e^x}{1+e^x}$ où u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On a alors $y_p'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}u(x)}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^x u'(x)}{1+e^x} + \dfrac{e^x u(x)}{(1+e^x)^2}$.
   Donc y_p est solution de (E) si, et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+e^x)\left(\frac{e^x u'(x)}{1+e^x} + \frac{e^x u(x)}{(1+e^x)^2}\right) - \frac{u(x)e^x}{1+e^x} + \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x u'(x) + \frac{e^x u(x)}{1+e^x} - \frac{u(x)e^x}{1+e^x} + \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}
\end{aligned}$$

   On choisit alors de prendre $u(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.
   Une solution particulière de (E) est alors $x \mapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
   D'après le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équations différentielle linéaire d'ordre 1, y est solution de (E) si, et seulement si, y est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{C}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{e^x+1}\left(\lambda + \frac{1}{e^x+1}\right).$$

   b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$, on a, pour $\lambda \neq 0$, $\lambda + \dfrac{1}{1+e^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda$.
   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 1$.
   Donc, pour $\lambda \neq 0$, $y(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda$.
   Pour $\lambda = 0$, $y(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e^x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Partie B : Étude de fonctions

1. a) La fonction f est la fonction de la question 2.a) de la partie A pour $\lambda = 0$. Donc f est bien solution de (E).
   f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2},$$
   en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{2x}.
   Ainsi, $f(-x) = f(x)$ et donc f est une fonction paire.

   b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables donc le dénominateur ne s'annule pas.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - 2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^3} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$.
   Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $1 - \mathrm{e}^x$. On en déduit donc les variations suivantes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

   Il n'est pas indispensable de mettre les valeurs aux bornes.

   c) — La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   — Comme $\mathrm{e}^x > 0$, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$.
   — Étudions maintenant la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Comme f est une fonction paire, il suffit d'étudier la nature de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Cette intégrale est impropre uniquement en $+\infty$.
   Soit $A > 0$:
$$\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^A$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{e}^A+1} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \text{ quand } A \to +\infty.$$
   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.
   Comme f est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
   En conclusion, f est bien une densité de probabilité.

2. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale proposée est impropre en $+\infty$. Soit $A \geqslant x$. On a :
$$\int_x^A \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-kt}}{k}\right]_x^A = \frac{\mathrm{e}^{-kx} - \mathrm{e}^{-kA}}{k} \to \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k},$$
   lorsque A tend vers $+\infty$.
   Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k}$.

b) D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_x^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-\mathrm{e}^{-t})^k\,\mathrm{d}t \text{ linéarité de l'intégrale} \\
&= -\int_x^{+\infty} -\mathrm{e}^{-t}\frac{1-(-\mathrm{e}^{-t})^n}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left(-\ln(1+\mathrm{e}^{-A}) + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right) + (-1)^{n+1}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + (-1)^{n+1}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
|\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - g_n(x)| &= \left|(-1)^n \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \text{ car } \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{t}} \leqslant 1 \text{ et les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}.
\end{aligned}$$

d) En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| &= \left|\int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - g_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \left|\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - g_n(x)\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\,\mathrm{d}x \text{ en intégrant l'inégalité de la question précédente avec l} \\
&\leqslant \frac{1}{n^2} \text{ d'après 2.a).}
\end{aligned}$$

3. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \dfrac{1}{k^2}$.

D'après notre cours, on sait que $\sum \dfrac{1}{k^2}$ est convergente.

Donc $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ est absolument convergente.

b) Une série absolument convergente est convergente donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$ et d'après ce qui est admis dans l'énoncé cette limite vaut $\dfrac{\pi^2}{12}$.

Or, d'après l'inégalité de la question 2.d), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$, car $\dfrac{1}{n^2} \to 0$.

Par unicité de la limite, on obtient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie C : Espérance et variance

1. a) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + 1 \geqslant \mathrm{e}^x > 0$, donc par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, $(\mathrm{e}^x+1)^2 \geqslant \mathrm{e}^{2x}$. Par passage à l'inverse dans une inégalité de nombres strictement positifs puis par multiplication par e^x qui est un réel positif on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{-x}.$$

b) On sait que X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Comme f est une fonction paire, la fonction $x \mapsto |xf(x)|$ est paire.
Donc il suffit d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x$ qui est impropre uniquement en $+\infty$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|xf(x)| \leqslant x\mathrm{e}^{-x}$. Et on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente car on reconnait l'intégrale intervenant dans le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
Donc, par critère de majoration sur les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente.
On a donc montré que X admet une espérance. De plus, comme la fonction $x \mapsto xf(x)$ est impaire, d'après notre cours $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Donc $E(X) = 0$.

2. a) Soit $A > 0$. On pose :

$$u(x) = x^2 \qquad u'(x) = 2x$$
$$v'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$$
$$v(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;A]$, donc, par intégration par parties :

$$\int_0^A \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{1+\mathrm{e}^x}\right]_0^A + \int_0^A \frac{2x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{A^2}{1+\mathrm{e}^A} + \int_0^A \frac{2x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

On pose alors :

$$w(x) = 2x \qquad w'(x) = 2$$
$$z'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$$
$$z(x) = -\ln(\mathrm{e}^{-x}+1).$$

Les fonctions w et z sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;A]$, donc, par intégration par parties :

$$\int_0^A \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{A^2}{1+\mathrm{e}^A} + \left[-2x\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right]_0^A + 2\int_0^A \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{A^2}{1+\mathrm{e}^A} - 2A\ln(1+\mathrm{e}^{-A}) + 2\int_0^A \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

De plus, $\dfrac{A^2}{1+\mathrm{e}^A} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A^2}{\mathrm{e}^A} \to 0$ par croissances comparées, $2A\ln(1+\mathrm{e}^{-A}) \underset{A\to+\infty}{\sim} 2A\mathrm{e}^{-A} \to 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\int_0^A \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

b) D'après la formule de Kœnig-Huygens on sait que X admet une variance si, et seulement si X^2 admet une espérance et dans ce cas
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$
Or, d'après la formule de transfert, X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente (on intègre une fonction positive donc il n'est pas indispensable de préciser convergence absolue).

Comme la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire il suffit d'étudier la nature de $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$, ce qui a été fait à la question précédente.

Donc X admet une variance et :
$$\begin{aligned} V(X) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x - 0^2 \\ &= 4\int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Problème 2 :

Partie A : Une matrice diagonalisable

1. La famille d'événements (A_{2n}, B_{2n}) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :
$$u_{n+1} = P(A_{2n+2}) = P(A_{2n}) \times P_{A_{2n}}(A_{2n+2}) + P(B_{2n}) \times P_{B_{2n}}(A_{2n+2}).$$
D'après l'énoncé $P_{A_{2n}}(A_{2n+2}) = p$ et $P_{B_{2n}}(A_{2n+2}) = q$, donc $u_{n+1} = pu_n + qv_n$.

2. a) $C_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car initialement le virus est sur le serveur A.

De même que dans la question précédente, on peut montrer que $v_{n+1} = qu_n + pv_n$. On a donc $C_{n+1} = MC_n$ avec $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

b) *$GL_2(\mathbb{R})$ est une notation HORS-PROGRAMME qui signifie ensemble des matrices carrées de taille 2 inversibles.*

La matrice M est symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable.

Déterminons les valeurs propres de M. On cherche donc les réels λ tels que $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire tels que $\det(M - \lambda I_2) = 0$. Or on a :
$$\det(M - \lambda I_2) = (p-\lambda)^2 - q^2 = (p+q-\lambda)(p-q-\lambda) = (1-\lambda)(p-q-\lambda).$$
Les valeurs propres de M sont donc 1 et $p - q = 2p - 1$.

Comme M est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ admettant deux valeurs propres distinctes, ses sous-espaces propres sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ chacun de dimension 1. Il suffit donc de trouver un vecteur propres non nul pour chaque valeur propre pour avoir une base de chaque sous-espace propre.

— On peut voir que $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $E_1(M) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

— On a aussi $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (p-q)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $E_{p-q}(M) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de vecteurs propres de M, donc on sait que l'on a
$$M = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} p-q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $P \times {}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2I_2$.

On a donc $P \times \frac{1}{2}\,{}^tP = \frac{1}{2}\,{}^tP \times P = I_2$ et ainsi $P^{-1} = \frac{1}{2}\,{}^tP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $C_n = PD^nP^{-1}C_0$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— Comme $D^0 = I_2$, on a bien $PD^0P^{-1}C_0 = C_0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
D'après la question 2.a :

$$C_{n+1} = MC_n = PDP^{-1} \times PD^nP^{-1}C_0 = PD^{n+1}P^{-1}C_0.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = PD^nP^{-1}C_0$.

En calculant le produit matriciel on obtient que $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}(1 + (p-q)^n) \\ v_n = \frac{1}{2}(1 - (p-q)^n) \end{cases}$.

b) Comme $p \in]0;1[$, $p - q \in]-1;1[$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (p-q)^n = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

4. Si le virus est initialement en B, on a $C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}(1 - (p-q)^n) \\ v_n = \frac{1}{2}(1 + (p-q)^n) \end{cases}$.

Les limites sont alors toujours de $\frac{1}{2}$.

Partie B :

*Attention, il est **abusif** ici de parler de moyenne empirique et variance empirique car les X_i ne sont pas indépendantes et de même loi.*

1. X_i est une variable finie donc elle admet une espérance et une variance. De plus

$$E(X_i) = -P(X_i = -1) + P(X_i = 1) = -v_i + u_i = (p-q)^i.$$

On a aussi $E(X_i^2) = P(X_i = -1) + P(X_i = 1) = 1$, donc, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 1 - (p-q)^{2i}.$$

2. a) Sachant que le virus est sur le serveur A au bout de $2i$ semaines, calculer la probabilité qu'il se retrouve sur le serveur A au bout de $2j$ semaines revient au même que de calculer la probabilité que le virus soit sur le serveur A initialement puis qu'il se retrouve sur le serveur A au bout de $2(j-i)$ semaines car dans le premier cas, les mouvement effectués avant la semaine $2i$ n'ont pas d'influence sur les mouvements suivant.
On a donc bien $P_{[X_i=1]}(X_j = 1) = P(X_{j-i} = 1)$.

b) *Encore une notation hors-programme $P(X_i = 1, X_j = 1)$ signifie $P([X_i = j] \cap [X_j = 1])$.*
$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = P(X_i = 1) \times P_{[X_i=1]}(X_j = 1) = u_i \times P(X_{j-i} = 1) = u_i \times u_{j-i}$.
Donc $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \dfrac{(1 + (p-q)^i)(1 + (p-q)^{j-i})}{4}$.

c) $P([X_i = 1] \cap [X_j = -1]) = P(X_i = 1) \times P_{[X_i=1]}(X_j = -1) = u_i \times P(X_{j-i} = -1) = u_i \times v_{j-i}$.
Donc $P([X_i = 1] \cap [X_j = -1]) = \dfrac{(1 + (p-q)^i)(1 - (p-q)^{j-i})}{4}$.
Pour $P_{[X_i=-1]}(X_j = ...)$ on utilise les résultat que la question A.4. car c'est comme si le virus été initialement en B.
Donc $P([X_i = -1] \cap [X_j = 1]) = \dfrac{(1 - (p-q)^i)(1 - (p-q)^{j-i})}{4}$ et $P([X_i = -1] \cap [X_j = -1]) = \dfrac{(1 - (p-q)^i)(1 + (p-q)^{j-i})}{4}$.

d)

$$P(X_iX_j = 1) = P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) + P([X_i = -1] \cap [X_j = -1])$$
$$= \frac{1 + (p-q)^{j-i}}{2} = P(X_{j-i} = 1)$$

X_iX_j suit donc la même loi que X_{j-i}. On en déduit donc que $E(X_iX_j) = E(X_{j-i}) = (p-q)^{j-i}$.

3. a) Par linéarité de l'espérance :

$$E(M_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(p-q)^i = \frac{1-(p-q)^{n+2}}{2q(n+1)},$$

car $p - q = 2p - 1 \neq 1$ car $p \neq 1$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n} X_i^2 + \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n+1} X_iX_j$.

Par linéarité de l'espérance et d'après les résultats précédents, on a donc :

$$E(M_n^2) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n} E(X_i^2) + \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n+1} E(X_iX_j)$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} E(X_iX_j).$$

c) En reprenant la définition de la variance empirique du cours, on a $S_n^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} X_i^2 - M_n^2$.

Par linéarité de l'espérance et d'après les questions précédentes :

$$E(S_n^2) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} E(X_i^2) - E(M_n^2)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} E(X_iX_j)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} (p-q)^{j-i}$$
$$= \frac{n}{n+1} - \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}(p-q)^{j-i}$$
$$= \frac{n}{n+1} - \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{j=1}^{n}(p-q)^j \frac{1-\frac{1}{(p-q)^j}}{1-\frac{1}{p-q}} \text{ car } p-q \neq 1$$
$$= \frac{n}{n+1} - \frac{2(p-q)}{(n+1)^2(p-q-1)}\sum_{j=1}^{n}(p-q)^j + \frac{2(p-q)n}{(n+1)^2(p-q-1)}$$
$$= \frac{n}{n+1} - \frac{2(p-q)^2}{(n+1)^2(p-q-1)} \times \frac{1-(p-q)^n}{1-(p-q)} + \frac{2n(p-q)}{(n+1)^2(p-q-1)}$$

En remarquant que $p - q - 1 = -2q$, on obtient

$$E(S_n^2) = \frac{n}{n+1} + \frac{p-q}{(n+1)^2 q}\left[\frac{(p-q)(1-(p-q)^n)}{2q} - n\right].$$

Partie C : Équation matricielle

1. On a $D_{2n} = C_n$.

2. a) On sait que $C_{n+1} = MC_n$. On a donc $D_{2n+2} = MD_{2n}$.
Mais, par hypothèse de l'énoncé, on a aussi $D_{2n+2} = N^2 D_{2n}$.
On en déduit donc que, pour tout entier n, $MD_{2n} = N^2 D_{2n}$, ce qui donne$(N^2 - M)C_n = 0$.

b) D'après la question précédente on a $(N^2 - M)C_0 = 0$ et $(N^2 - M)C_1 = 0$.
Or $(C_0, C_1) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre car $q \neq 0$ qui contient deux vecteurs donc c'est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
On peut donc en déduire que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $(N^2 - M)X = 0$ et donc $N^2 - M = 0$.

c) On a $\Delta^2 = P^{-1}NPP^{-1}NP = P^{-1}N^2P = P^{-1}MP = D$.
On écrit alors $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et l'égalité $\Delta^2 = D$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} a^2 + bc = p - q \\ ab + bd = 0 \\ ac + dc = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = p - q \\ b = 0 \text{ ou } a + d = 0 \\ c = 0 \text{ ou } a + d = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$$

On remarque alors que si $a + d = 0$ alors $a^2 - d^2 = 0$ et donc en soustrayant la ligne 1 à la ligne 4, on a $a^2 - d^2 = p - q - 1 = 0$, d'où $2q = 0$ et ainsi $q = 0$ ce qui est contraire à notre hypothèse.

On en déduit donc que $\Delta^2 = D$ implique $\begin{cases} a^2 = p - q \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d^2 = 1 \end{cases}$.

Comme l'énoncé impose l'existence de N et donc de Δ, cela impose que $p - q \geqslant 0$.
On en déduit alors les matrices Δ solutions de $\Delta^2 = D$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Comme $N = P\Delta P^{-1}$, on en déduit 4 matrices possibles pour N :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{p-q}+1 & 1-\sqrt{p-q} \\ 1-\sqrt{p-q} & \sqrt{p-q}+1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{p-q}+1 & 1+\sqrt{p-q} \\ 1+\sqrt{p-q} & -\sqrt{p-q}+1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{p-q}-1 & -1-\sqrt{p-q} \\ -1-\sqrt{p-q} & \sqrt{p-q}-1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{p-q}-1 & -1+\sqrt{p-q} \\ -1+\sqrt{p-q} & -\sqrt{p-q}-1 \end{pmatrix}$$

Comme on cherche à ce que N soit à coefficients positifs ou nuls, les deux seules matrices répondant au conditions demandées sont :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{p-q}+1 & 1-\sqrt{p-q} \\ 1-\sqrt{p-q} & \sqrt{p-q}+1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{p-q}+1 & 1+\sqrt{p-q} \\ 1+\sqrt{p-q} & -\sqrt{p-q}+1 \end{pmatrix}.$$

Partie D : Généralisation de l'équation précédente

1. a) Par définition $\ker(M) = \{X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) / MX = 0\}$.
Or, lorsque $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $MX = O \Leftrightarrow x = y$ donc $\ker(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.
De plus $\text{Im}(M) = \{MX / X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\} = \left\{\begin{pmatrix} x-y \\ x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.
On a donc bien $\ker(M) = \text{Im}(M)$.

b) Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M.
On remarque alors que $f((1,1)) = (0,0)$ et $f((0,1)) = (1,1)$ et $\mathscr{B} = ((1,1),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car c'est une famille libre de 2 vecteurs.
On a alors $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T$.
M et T sont donc associées au même endomorphisme mais dans deux bases différentes donc, d'après la formule de changement de base : $M = QTQ^{-1}$ avc $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) Notons $\Theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors

$$\Theta^2 = T \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + bc = 0 \\ ab + bd = 1 \\ ac + dc = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + bc = 0 \\ b(a + d) = 1 \\ c = 0 \text{ ou } a + d = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{array} \right.$$

Dans la troisième équation, si on considère l'option $c = 0$, alors la première et la quatrième équation nous donnent $a^2 = d^2 = 0$ et donc $a = d = 0$. La deuxième équation est alors fausse.

Donc la seule option que nous laisse la troisième équation est $a+d = 0$ mais c'est encore en contradiction avec la deuxième équation.

On déduit donc que l'équation $\Theta^2 = T$ n'admet aucune solution.

b) On cherche à savoir s'il existe N tel que $N^2 = M$.
Or $N^2 = M \Leftrightarrow Q^{-1}N^2Q = T \Leftrightarrow (Q^{-1}NQ)^2 = T$.
Comme on vient de prouver que l'équation $\Theta^2 = T$ n'admet pas de solution, il est impossible de trouver une matrice N solution de l'équation $N^2 = M$.
En conclusion l'équation matricielle $N^2 = M$ n'admet pas toujours des solutions.