Correction du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 3

Exercice : Agro-véto 2019

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, considérons l'épreuve de Bernoulli « au n-ème lancer on obtient un face ». La probabilité de succès est $P(F_n) = \dfrac{1}{2}$.
   Les lancers sont indépendants, les épreuves de Bernoulli considérées sont donc indépendantes. La variable aléatoire T désigne donc le rang du premier succès dans une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.
   La variable aléatoire T suit donc une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   On a donc $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(T=k) = \dfrac{1}{2} \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k.}$
   De plus $\boxed{E(T) = \dfrac{1}{1/2} = 2 \text{ et} V(T) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2.}$
2. L'événement $[T > n]$ est réalisé si, et seulement si, les n premiers lancers ont donné pile.
   On a donc $[T > n] = \overline{F_1} \cap \ldots \cap \overline{F_n}$ et, comme les lancers sont indépendants :
   $$P(T > n) = P(\overline{F_1}) \times \ldots \times P(\overline{F_n}) = \boxed{\frac{1}{2^n}.}$$
   Autre méthode : $[T > n] = \displaystyle\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [T = k]$.
3. (*on va ici redémontrer la propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique*).
   $$\begin{aligned} P_{[T>n]}(T > n+m) &= \frac{P([T>n] \cap [T > n+m])}{P(T>n)} = \frac{P(T > n+m)}{P(T>n)} \text{ car } [T > n+m] \subset [T > n] \\ &= \frac{1}{2^{n+m}} \times 2^n = \frac{1}{2^m} = P(T > m). \end{aligned}$$
   On a bien $\boxed{P_{[T>n]}(T > n+m) = P(T > m)}$.
   On peut dire que la loi géométrique est sans mémoire : le fait d'avoir eu n échecs ne change pas la probabilité d'en avoir encore m ensuite.
4. $p_1 = P(S = 1) = \boxed{0}$ car il faut au moins deux lancers pour faire un double face.
   $p_2 = P(S=2) = P(F_1 \cap F_2) = \boxed{\dfrac{1}{4}}$ car les lancers sont indépendants.
   $p_3 = P(S=3) = P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = \boxed{\dfrac{1}{8}}$ car les lancers sont indépendants.
   $p_4 = P(S=4) = P((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)) = P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)$, car on a une union d'événements disjoints.
   Toujours par indépendance des lancers, on obtient $p_4 = \dfrac{2}{16} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$.
   On en déduit $\boxed{q_1 = 1,\ q_2 = \dfrac{3}{4},\ q_3 = \dfrac{5}{8} \text{ et } q_4 = \dfrac{1}{2}.}$
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $[S > n] = \overline{[S \leqslant n]} = \overline{\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [S = k]}$.
   Ayant une union d'événements disjoints deux à deux, on en déduit que
   $$P(S > n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(S = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k = q_n.$$
   Ainsi $\boxed{P(S > n) = q_n}$.

6. Une probabilité étant toujours comprise entre 0 et 1, d'après la question précédente, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ q_n \in [0;1].}$
De plus, $[S > n+1] \subset [S > n]$ donc $q_{n+1} \leqslant q_n$ et ainsi la suite (q_n) est décroissante.
La suite (q_n) est donc décroissante et minorée, donc $\boxed{\text{elle est convergente.}}$

7. L'astuce consiste ici à remarquer que $[S = n+3] = [S > n] \cap \overline{F_{n+1}} \cap F_{n+2} \cap F_{n+3}$.
On a donc :
$$\begin{aligned} p_{n+3} &= P(S > n) \times P_{[S>n]}(\overline{F_{n+1}}) \times P_{[S>n]\cap\overline{F_{n+1}}}(F_{n+2}) \times P_{[S>n]\cap\overline{F_{n+1}}\cap F_{n+2}}(F_{n+3}) \\ &= q_n \times \frac{1}{8}. \end{aligned}$$
Par définition de q_n on a alors :
$$\boxed{q_{n+3} = q_{n+2} - p_{n+3} = q_{n+2} - \frac{q_n}{8}.}$$

8. On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \ell \in [0;1]$.
Par composition de limites on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} q_{n+3} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_{n+2} = \ell$.
Par propriété d'unicité de la limite, on a donc $\ell = \ell - \dfrac{\ell}{8}$ et donc $\ell = 0$.
Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0}$ ce qui signifie qu' $\boxed{\text{on est presque certain d'obtenir un double face après un grand nombre de lancers.}}$

9. Dans cette question, l'astuce consiste à distinguer le résultat du premier lancer. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(F_1, \overline{F_1})$ on a
$$\begin{aligned} P(S > n+2) &= P(F_1)P_{F_1}(S > n+2) + P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(S > n+2) \\ &= \frac{1}{2}P_{F_1}(S > n+2) + \frac{1}{2}P_{\overline{F_1}}(S > n+2) \end{aligned}$$
Il faut ensuite remarquer que lorsqu'on sait que F_1 est réalisé dire que $[S > n+2]$ revient à dire qu'on a obtenu pile au deuxième lancer et qu'ensuite à partir du 3ème lancer, tout peut se produire, c'est comme si on reprenait l'expérience à 0 et qu'on obtenait l'événement $[S > n]$.
Donc $P_{F_1}(S > n+2) = P(\overline{F_2}) \times P(S > n)$.
De même, le fait de savoir qu'on a fait pile au premier lancer n'impose aucune contrainte à partir du deuxième lancer et donc c'est comme si on repartait de 0 et qu'on obtenait l'événement $[S > n+1]$. Donc $P_{\overline{F_1}}(S > n+2) = P(S > n+1)$.
En conclusion, on a $P(S > n+2) = \dfrac{1}{4}P(S > n) + \dfrac{1}{2}P(S > n+1)$ et donc $\boxed{q_{n+2} = \dfrac{q_{n+1}}{2} + \dfrac{q_n}{4}}$.

10. Les racines sont $\boxed{r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}.}$

11. Montrons que le système proposé est de Cramer. Pour cela, il suffit de montrer que la matrice associée à ce système est inversible en calculant son déterminant :
$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} = r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2 = r_1 r_2 (r_2 - r_1) = -\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \neq 0.$$
$\boxed{\text{Il existe donc un unique couple } (\alpha, \beta) \text{ solution du système donné.}}$

12. $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique associée est $r^2 = \dfrac{1}{2}r + \dfrac{1}{4}$.
Les solutions de cette équation sont r_1 et r_2. D'après notre cours, on sait qu'il existe λ et μ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
En évaluant pour $n = 1$ et $n = 2$ on trouve que λ et μ sont solutions du système de la question 11.
Or on a prouvé que ce système admet une unique solution que nous avons noté (α, β) donc $\lambda = \alpha$ et $\mu = \beta$.
En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.}$

13. On a $\dfrac{r_1^n}{r_2^n} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n \to 0$ car $|r_1| < r_2$ donc $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right| < 1$.
On peut alors écrire $q_n = \beta r_2^n \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n + 1\right)$ et en déduire que $\boxed{q_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta r_2^n.}$

Problème : G2E 2023

Partie A : matrices d'ajout

1. a) Les valeurs présentes dans la matrice A signifient que si on tire une boule noire, on ajoute 3 boules noires dans l'urne et 0 boule blanche et si l'on tire une boule blanche, on ajoute 1 boule noire et 2 boules blanches.
   Donc, dans la situation présentée dans cette question, à l'étape suivante
   $\boxed{\text{l'urne contient 6 boules noires et 5 boules blanches.}}$

   b) Par définition, $\boxed{\sigma_A = 3+0 = 1+2 = 3}$. σ_A représente le nombre total de boules ajoutées dans l'urne à chaque étape.
   À chaque étape on ajoute 0 ou 2 boules blanches, donc un nombre paire de boules blanches. Sachant qu'il y a initialement 1 boule blanche dans l'urne, il y aura donc toujours un nombre impair de boules blanches dans notre urne.
   $\boxed{\text{Il est impossible d'avoir 22 boules blanches et 20 boules noires.}}$

2. a) (i) Montrons que $\mathscr{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   — Par définition de $\mathscr{B}$, on a bien $\mathscr{B} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   — La matrice nulle est bien une matrice à coefficients réels qui vérifie que la somme des éléments de la première ligne est égale à la somme des éléments de la deuxième ligne.
   Donc $\mathbb{O}_2 \in \mathscr{B}$.
   — Soit M et N deux matrices de $\mathscr{B}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On note $M = \begin{pmatrix} x_M & y_M \\ z_M & t_M \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x_N & y_N \\ z_N & t_N \end{pmatrix}$. On a alors

$$M + \lambda N = \begin{pmatrix} x_M + \lambda x_n & y_M + \lambda y_N \\ z_M + \lambda z_N & t_M + \lambda t_N \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

   et

$$\begin{aligned} x_M + \lambda x_n + y_M + \lambda y_N &= x_M + y_M + \lambda(x_N + y_N) \\ &= z_M + t_M + \lambda(z_N + t_N) && \text{car } M, N \in \mathscr{B} \\ &= z_M + \lambda z_N + t_M + \lambda t_N. \end{aligned}$$

   Donc $M + \lambda N \in \mathscr{B}$.
   $\boxed{\mathscr{B} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ donc } \mathscr{B} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$
   Autre méthode : $\mathscr{B} = vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$.

   (ii) On peut remarquer que $I_2 \in \mathscr{A}$ et pourtant $-I_2 \notin \mathscr{A}$ (car les coefficients ne sont pas des entiers naturels). Cela contredit l'une des propriétés d'un espace vectoriel.
   $\boxed{\mathscr{A} \text{ n'est pas un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$

   b) Soit $A \in \mathscr{A}$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a

$$\sigma_A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0,$$

   car a, b, c et d sont des entiers naturels (une somme de nombres positifs est nulle si, et seulement si chaque nombre est nul).
   On a donc $\boxed{\sigma_A = 0 \Leftrightarrow A = O_2.}$

3. a) Il suffit de remarquer que $a + b = c + d \Leftrightarrow a - c = d - b$.
   On a donc bien, $\boxed{\text{pour } A \in \mathscr{A},\ a - c = d - b.}$

   b) Par définition :

$$\begin{aligned} \det(A) &= ad - bc \\ &= ad + bd - bd - bc \\ &= d(a+b) - b(d+c) \\ &= d\sigma_A - b\sigma_A \\ &= \sigma_A(d-b) \\ &= \sigma_A\delta_A. \end{aligned}$$

   On a bien $\boxed{\det(A) = \sigma_A\delta_A.}$

c) On a

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} && \text{calcul du produit} \\ &= \det(A) I_2 && \text{définition du déterminant} \\ &= \sigma_A \delta_A I_2 && \text{question précédente.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a bien } AA' = \sigma_A \delta_A I_2.}$

d) On sait, d'après notre cours, que A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A'$.

En ajoutant la contrainte $A^{-1} \in \mathscr{A}$, cela donne :

$$\begin{cases} A \text{ inversible} \\ A^{-1} \in \mathscr{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \det(A) \neq 0 \\ \dfrac{d}{\sigma_A \delta_A} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{-b}{\sigma_A \delta_A} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{-c}{\sigma_A \delta_A} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{a}{\sigma_A \delta_A} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{d-b}{\sigma_A \delta_A} = \dfrac{a-c}{\sigma_A \delta_A} \end{cases}$$

Comme σ_A est supérieur ou égal à tous les coefficients de la matrice, on a $0 \leqslant \dfrac{a}{\sigma_A} \leqslant 1$ (et de même avec b, c et d).
Donc, $\dfrac{a}{\sigma_A \delta_A} \leqslant 1$ (et de même avec $-b$, $-c$ et d) donc $\dfrac{a}{\sigma_A \delta_A} \in \mathbb{N}$ si, et seulement si $\dfrac{a}{\sigma_A \delta_A} = 0$ ou 1. On peut raisonner de même pour les autres fractions. On a donc :

$$\begin{cases} A \text{ inversible} \\ A^{-1} \in \mathscr{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \det(A) \neq 0 \\ \dfrac{d}{\sigma_A \delta_A} = 0 \text{ ou } 1 \\ \dfrac{-b}{\sigma_A \delta_A} = 0 \text{ ou } 1 \\ \dfrac{-c}{\sigma_A \delta_A} = 0 \text{ ou } 1 \\ \dfrac{a}{\sigma_A \delta_A} = 0 \text{ ou } 1 \\ d-b = a-c \end{cases}$$

Les lignes 2 à 5 de ce système nous donnent 16 choix possibles pour les valeurs de a, b, c et d. En mettant en lien ces matrices avec les contraintes des lignes 1 et 6 du système, il ne nous restera que 2 matrices possibles.
Par exemple, le cas $a = b = c = d = 0$ est impossible car le déterminant est alors nul. Pour la même raison on ne peut pas avoir $a = b = 0$ ou alors $c = d = 0$,....
Après avoir éliminé tous les cas où le déterminant est nul il nous reste encore 6 options :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_A\delta_A \\ -\sigma_A\delta_A & \sigma_A\delta_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_A\delta_A & 0 \\ -\sigma_A\delta_A & \sigma_A\delta_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_A\delta_A & -\sigma_A\delta_A \\ -\sigma_A\delta_A & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_A\delta_A & -\sigma_A\delta_A \\ 0 & \sigma_A\delta_A \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \sigma_A\delta_A & 0 \\ 0 & \sigma_A\delta_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_A\delta_A \\ -\sigma_A\delta_A & 0 \end{pmatrix}.$$

Les 4 premières matrices ne respectent pas le fait que la somme des coefficients de la première ligne est égale à la somme des coefficients de la deuxième ligne (car $\sigma_A \delta_A \neq 0$).
Il nous reste donc 2 candidats. En remarquant que $\sigma_A \delta_A = \det(A)$ et que

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_A\delta_A & 0 \\ 0 & \sigma_A\delta_A \end{pmatrix} = (\sigma_A\delta_A)^2 = (\det(A))^2, \text{ et } \det \begin{pmatrix} 0 & \sigma_A\delta_A \\ \sigma_A\delta_A & 0 \end{pmatrix} = -(\sigma_A\delta_A)^2 = -(\det(A))^2,$$

on en déduit que, dans le premier cas $\det(A) = 1$ et donc $a = d = 1$ et dans le second cas $\det(A) = -1$ et donc $b = c = 1$.
En résumé, si A est inversible et $A^{-1} \in \mathscr{A}$ alors $A = I_2$ ou $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Réciproquement, ces deux matrices sont bien dans $\mathscr{A}$, inversible et leur inverse est dans $\mathscr{A}$.
Donc

$$\boxed{\begin{cases} A \text{ inversible} \\ A^{-1} \in \mathscr{A} \end{cases} \Leftrightarrow \quad A = I_2 \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Partie B

4. a) À chaque étape le nombre de boules noires reste identique ou augmente de σ. Dans le pire des cas au bout des n étapes, on n'a rajouté aucune boule noire, dans le meilleur des cas on à rajouté $n\sigma$ boules noires et on rajoute toujours un multiple de σ boules noires.

$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N},\ S_n(\Omega) = \{1 + k\sigma / k \in [\![1, n]\!]\}.}$

D'après l'énoncé $S_0 = 1$, et pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, le nombre de boules noires rajoutées à l'issue du $n+1$ tirage est σ si $X_{n+1} = 1$ et 0 si $X_{n+1} = 0$. Dans tous les cas le nombre de boules noires rajoutées est égal à σX_{n+1}. On a donc :

$$S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{déjà présentes}} + \underbrace{\sigma X_{n+1}}_{\text{rajoutées}}$$

$\boxed{S_0 = 1 \text{ et pour } n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = S_n + \sigma X_{n+1}.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $s \in S_n(\Omega)$. Supposons $[S_n = s]$ réalisé alors lors des n premières étapes ont été rajoutées $s - 1$ boules noires et comme la matrice d'ajout est équilibrée $n\sigma$ boules des deux couleurs ont été rajoutées. Lors du tirage $n+1$ l'urne est composée de s boules noires et $2 + n\sigma$ boules au total.

$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } s \in S_n(\Omega),\ P_{[S_n=s]}(X_{n+1} = 1) = \frac{s}{2 + n\sigma}.}$

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule des probabilité totales avec le système complet d'événements $([S_n = s])_{s \in S_n(\Omega)}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) P_{[S_n=s]}(X_{n+1} = 1) \\
&= \sum_{s \in S_n(\Omega)} P(S_n = s) \frac{s}{2 + n\sigma} && \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{2 + n\sigma} \sum_{s \in S_n(\Omega)} s P(S_n = s) \\
&= \frac{1}{2 + n\sigma} E(S_n) && \text{définition d'une espérance}
\end{aligned}$$

Comme de plus $X_{n+1}(\Omega) = \{0;\ 1\}$

$$E(X_{n+1}) = 0P(X_{n+1} = 0) + 1P(X_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1)$$

$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}) = \frac{1}{2 + n\sigma} E(S_n).}$

b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) : E(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2}$.

— D'une part $E(S_0) = 1$ car S_0 est la variable certaine égale à 1 et d'autre part $\frac{2 + \sigma \times 0}{2} = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
E(S_{n+1}) &= E(S_n + \sigma X_{n+1}) && \text{question 4.a)} \\
&= E(S_n) + \sigma E(X_{n+1}) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= E(S_n) + \sigma \frac{E(S_n)}{2 + \sigma n} && \text{question 5.a)} \\
&= \left(1 + \frac{\sigma}{2 + \sigma n}\right) \times \frac{2 + \sigma n}{2} && \text{hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{2 + (n+1)\sigma}{2 + \sigma n} \times \frac{2 + \sigma n}{2} \\
&= \frac{2 + (n+1)\sigma}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\text{pour } n \in \mathbb{N},\ E(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2}.}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X_n prend pour valeurs 0 et 1, donc suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ où $p = E(X_n)$. D'après la question 5.a) et comme $n-1 \in \mathbb{N}$

$$E(X_n) = \frac{E(S_{n-1})}{2+\sigma(n-1)}.$$

En utilisant le résultat de la question précédente

$$p = E(X_n) = \frac{\frac{2+\sigma(n-1)}{2}}{2+\sigma(n-1)} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$

BONUS

6. Soit $A \in \mathscr{A}$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' \in \mathscr{A}$ telle que $A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

   On a alors $A + kA' = \begin{pmatrix} a+ka' & b+kb' \\ c+kc' & d+kd' \end{pmatrix}$.

   Comme k est un entier naturel on a bien ici une matrice à coefficients entiers naturels.

   De plus, $a + ka' + b + kb' = a + b + k(a' + b') = \sigma_A + k\sigma_{A'}$ et $c + kc' + d + kd' = c + d + k(c' + d') = \sigma_A + k\sigma_{A'}$.

   On a donc bien $\boxed{A + kA' \in \mathscr{A}.}$

7. Soit $A \in \mathscr{A}$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' \in \mathscr{A}$ telle que $A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

   On a alors $AA' = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$.

   AA' est bien une matrice à coefficients entiers naturels.

   De plus, $aa' + bc' + ab' + bd' = a(a' + b') + b(c' + d') = a\sigma_{A'} + b\sigma_{A'} = \sigma_A\sigma_{A'}$.

   Et $ca' + dc' + cb' + dd' = c(a' + b') + d(c' + d') = c\sigma_{A'} + d\sigma_{A'} = \sigma_A\sigma_{A'}$.

   Donc $\boxed{AA' \in \mathscr{A}}$.