

*Variables aléatoires réelles à densité***Table des matières**

I	Introduction : notion de densité de probabilité	2
II	Généralités sur les variables à densité	3
1	Définition et caractérisation	3
2	Lien entre VAR à densité et densité de probabilité	6
3	Calculer une probabilité avec une variable à densité	7
4	Support d'une variable à densité	8
5	Pour fabriquer un exercice...	9
III	Moments d'une variable à densité	10
1	Espérance	10
a	Définition	10
b	Propriétés	11
2	Moment d'ordre r	13
3	Variance et écart-type	13
IV	Lois usuelles	14
1	Loi uniforme	14
2	Loi exponentielle	16
3	Loi normale	18
a	Loi normale centrée réduite	18
b	Loi normale de Laplace-Gauss	20
V	Exemples de fonction d'une variable à densité	21
1	g est affine	21
2	Fonction carrée	23
3	Fonction exponentielle	24
4	Fonction partie entière	25
VI	Somme de variables à densité indépendantes	25

Rappels :

Une variable aléatoire réelle (VAR) est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

Pour **toutes** les VAR on définit la fonction de répartition de X , que l'on note F_X , par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x).$$

I Introduction : notion de densité de probabilité

Définition 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que **f est une densité de probabilité** si, et seulement si :

- (i) f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives ou nulles ;
- (ii) f est continue sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points ;
- (iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Montrons que c'est une densité de probabilité.

- (i) f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et, comme l'exponentielle est positive, f est bien une fonction à valeurs positives ou nulles.

- (ii) Sur $] -\infty; 0[$, f est la fonction nulle donc f est continue sur $] -\infty; 0[$.

Sur $[0; +\infty[$, f est la composée des fonctions $x \mapsto -x$ et $t \mapsto e^t$ qui sont continues respectivement sur $[0; +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $[0; +\infty[$.

Ainsi on a montré que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(On pourrait regarder si f est continue en 0 mais cela n'apporte rien de plus donc on ne perd pas de temps à le faire.)

- (iii) Il nous faut maintenant vérifier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ et calculer la valeur de cette intégrale.

Sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

$\int_{-\infty}^0 0 dx$ est évidemment convergente et vaut 0.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ est une intégrale de référence. On sait que cette intégrale est convergente et vaut 1.

En conclusion l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et vaut $0 + 1 = 1$.

f est donc bien une densité de probabilité.

Remarque :

Il nous reste maintenant à faire le lien entre ces fonctions bien particulières et une certaine catégorie de variables aléatoires réelles.

II Généralités sur les variables à densité

1 Définition et caractérisation

Définition 2

Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et F_X sa fonction de répartition. On dit que X est **une variable aléatoire réelle à densité** ou que X **admet une densité**, s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) f est une densité de probabilité ;
- (ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

La fonction f s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X .

Remarque :

On dit **une** densité de probabilité car une variable à densité admet une infinité de densité.

Exemple 2 :

On considère la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin(x) & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 1 & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Montrons que X est une variable à densité dont une densité est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos(x) & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Pour cela nous allons vérifier les deux points de la définition.

(i) Montrons que f est une densité de probabilité.

a) La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives ou nulles car pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$.

b) f est continue sur $] -\infty; 0[$ et $\left] \frac{\pi}{2}; +\infty \right[$ car constante et f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme fonction usuelle.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$.

(On pourrait montrer que f est aussi continue en $\frac{\pi}{2}$ mais cela n'apporte rien de plus donc on ne perd pas de temps à le faire.)

c) Il nous faut maintenant vérifier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ et calculer la valeur de cette intégrale.

Sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx + \int_{\pi/2}^{+\infty} 0 dx.$$

$\int_{-\infty}^0 0 dx$ et $\int_{\pi/2}^{+\infty} 0 dx$ sont évidemment convergentes et valent 0.

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx$ n'est pas une intégrale impropre et donc elle est convergente.

De plus, $\int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$.

En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 0 + 1 + 0 = 1$.

f est donc bien une densité de probabilité.

(ii) Calculons maintenant $\int_{-\infty}^x f(t) \, dt$.

— Si $x < 0$, $\int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_{-\infty}^x 0 \, dt = 0$.

— Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $\int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_{-\infty}^0 0 \, dt + \int_0^x \cos(t) \, dt = \sin(x)$.

— Si $x > \frac{\pi}{2}$: $\int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_{-\infty}^0 0 \, dt + \int_0^{\pi/2} \cos(t) \, dt + \int_{\pi/2}^x 0 \, dt = 0 + 1 + 0 = 1$.

On a donc bien montré que, pour tout réel x , $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$.

Les deux points de la définition étant vérifiés, X est bien une variable à densité et f est une densité de X .

Remarque :

Cette définition n'est pas très facile à utiliser en pratique car souvent dans un exercice « concret » on connaît juste la fonction de répartition de X mais l'énoncé ne nous donne pas d'information sur la valeur d'une potentielle densité f . Voici un théorème bien plus pratique pour montrer qu'une VAR donnée est une variable à densité.

Théorème 1 : Caractérisation des VAR à densité par leur fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X .

X est une variable à densité **si, et seulement si** :

(i) F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points,

(ii) F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus toutes les fonctions f positives ou nulles et telles que $f(x) = F'_X(x)$ en tout point x où F_X est dérivable, sont alors des densités de X .

Démonstration :

Nous n'allons démontrer qu'un « morceau » de ce théorème :

Si X est une VAR à densité alors F_X est $\mathcal{C}^1$ en tout point de continuité de f et pour tout x en lequel f est continue, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$.

On suppose ici que f est continue sur $\mathbb{R}$. (Vous pouvez réfléchir à comment s'adapte la démonstration pour f continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.)

D'après la définition 2, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t) \, dt}_K + \int_0^x f(t) \, dt$.

Or, d'après le théorème fondamental de l'analyse, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) \, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction constante $x \mapsto K$ est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, par somme, F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Toujours d'après le théorème fondamental de l'analyse la dérivée de $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est f donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'_X(x) = f(x)$.

□

Remarques :

- On peut voir dans cette caractérisation que les variables discrètes ne sont pas des variables à densité.
- En pratique, nous utiliserons peu la définition pour montrer qu'une variable aléatoire est bien à densité. Le théorème ci-dessus sera plus rapide et aura l'avantage de donner une technique pour trouver une densité.

Conseils méthodologiques :

Ce théorème est **extrêmement important**. Il donne un moyen très simple de savoir si une variable aléatoire est à densité et en plus il permet de trouver une densité.

On peut aussi utiliser ce théorème dans « l'autre sens », lorsqu'on sait que X est une variable à densité, on sait que sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout.

Exemple 3 :

Soit X une VAR de fonction de répartition F_X définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Montrer que X est une variable à densité et donner une densité de X .

- (i) La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; 0]$ donc F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; 0]$.

La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ donc F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

F_X est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

(On pourrait ici montrer que F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais ce serait une perte de temps.)

- (ii) Comme F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Il nous reste à vérifier que F_X est continue en 0.

D'une part $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2}$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Et enfin, comme $F_X(0) = \frac{1}{2}$, on a bien montré que F_X est continue en 0.

Ainsi F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Grâce à ces deux points on peut affirmer que X est une variable à densité.

Pour trouver une densité de X on utilise la dérivée de F_X là où F_X est dérivable et on « complète » les points manquants par une valeur positive ou nulle.

Si $x > 0$, $F'_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$. Si $x < 0$, $F'_X(x) = \frac{1}{2}e^x$.

Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est une densité de X .

Théorème 2

Soit f une densité de probabilité.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et une variable aléatoire à densité X définie sur cet espace, tels que f est une densité de la variable X .

Remarque :

Résultat admis en BCPST.

Conseils méthodologiques :

Ce résultat permet de répondre aux questions du type « montrer que f est une densité d'une VAR ». Une fois qu'on a montré que f est une densité de probabilité, on peut alors nommer une variable aléatoire dont une densité est f .

Exemple 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}e^{-x^2/6} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire réelle X .
 2. Déterminer la fonction de répartition de X .
 3. Calculer $P(X > 3)$ et $P(-2 < X \leq 3)$.
1. Cette question est identique à la formulation « montrer que f est une densité de probabilité ».
- (i) Comme l'exponentielle est positive et que pour $x \geq 0$, $\frac{x}{3} \geq 0$, f est bien une fonction à valeurs positives ou nulles.
 - (ii) Sur $] -\infty; 0[$, f est la fonction nulle donc f est continue sur $] -\infty; 0[$.
La composée des fonctions $x \mapsto -x^2/6$ et $t \mapsto e^t$, qui sont continues respectivement sur $[0; +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$ est continue sur $[0; +\infty[$. Par produit avec la fonction $x \mapsto \frac{x}{3}$ qui est continue sur $[0; +\infty[$, f est continue sur $[0; +\infty[$.
Ainsi on a montré que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
(Encore une fois, on pourrait regarder si f est continue en 0 mais cela n'apporte rien de plus donc on ne perd pas de temps à le faire.)

- (iii) Il nous faut maintenant vérifier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ et calculer la valeur de cette intégrale.

Sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{3} e^{-x^2/6} dx.$$

$\int_{-\infty}^0 0 dx$ est évidemment convergente et vaut 0.

La fonction $x \mapsto \frac{x}{3} e^{-x^2/6}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3} e^{-x^2/6} dx$ est impropre en $+\infty$.

Soit $A > 0$: $\int_0^A \frac{x}{3} e^{-x^2/6} dx = \left[-e^{-x^2/6} \right]_0^A = 1 - e^{-A^2/6}$.

Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{x}{3} e^{-x^2/6} dx = 1$. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3} e^{-x^2/6} dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3} e^{-x^2/6} dx = 1$.

En conclusion l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et vaut $0 + 1 = 1$.

f est donc une densité de probabilité et ainsi il existe bien une VAR X dont f est une densité.

2. Notons F_X la fonction de répartition de X .

Par définition d'une VAR à densité, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Si $x < 0$, alors f est nulle sur $] -\infty; x]$ donc $F_X(x) = 0$.

Si $x \geq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{t}{3} e^{-t^2/6} dt = 1 - e^{-x^2/6}$. *On ne refait surtout pas le calcul car c'est ce qui a été fait au point (iii) de la question précédente !!*

En résumé, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/6} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. On a $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) = 1 - (1 - e^{-3^2/6}) = e^{-3/2}$

Pour calculer $P(-2 < X \leq 3)$, on remarque que $[X \leq 3] = [X \leq -2] \cup [-2 < X \leq 3]$. On a ici une union d'événements disjoints donc :

$$P(-2 < X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq -2) = F_X(3) - F_X(-2) = 1 - e^{-3/2} - 0 = 1 - e^{-3/2}.$$

3 Calculer une probabilité avec une variable à densité

Théorème 3

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f . On note F_X la fonction de répartition de X .

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt = F_X(a),$$

$$P(X > a) = P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(t) dt = 1 - F_X(a).$$

3. Pour tous réels a et b tels que $a < b$:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) \\ &= \int_a^b f(t) dt \\ &= F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

Démonstration :

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X = a] \subset \left[a - \frac{1}{n} < X \leq a \right]$ donc :

$$0 \leq P(X = a) \leq P\left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right). \quad (1)$$

Or $P\left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right) = F_X(a) - F_X\left(a - \frac{1}{n}\right)$. **À savoir redémontrer très rapidement !**

Comme X est une variable à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier en a .

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(a) - F_X\left(a - \frac{1}{n}\right) = F_X(a) - F_X(a) = 0$.

On déduit donc de l'encadrement (1) que $P(X = a) = 0$.

2. $[X \leq a] = [X = a] \cup [X < a]$. Les événements $[X = a]$ et $[X < a]$ étant disjoints, on a :

$$P(X \leq a) = P(X = a) + P(X < a) = 0 + P(X < a) = P(X < a).$$

De même, $P(X \geq a) = P(X > a)$.

Par définition de la fonction de répartition, $P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$.

Et on a $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt - \int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt$.

3. $[a \leq X < b] = [X = a] \cup [a < X < b]$. Les événements $[X = a]$ et $[a < X < b]$ étant disjoints, on a :

$$P(a \leq X < b) = P(X = a) + P(a < X < b) = 0 + P(a < X < b) = P(a < X < b).$$

De même pour les autres encadrements.

Et $[X \leq b] = [X \leq a] \cup [a < X \leq b]$ (union disjointe) donc :

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^b f(t) dt - \int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

□

Remarque :

La probabilité de l'événement $[a < X < b]$ est donc l'aire sous la courbe représentative de f entre les points d'abscisses a et b .

4 Support d'une variable à densité

Propriété 1

Soit I un intervalle de la forme $[a; b]$, $]a; b]$, $[a; b[$ ou $]a; b[$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $a < b$.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité et f une densité de X .

Si f est nulle en dehors de I alors :

$$\forall x \leq a, \quad P(X \leq x) = 0, \quad \text{et} \quad \forall x \geq b, \quad P(X \geq x) = 0.$$

Démonstration :

- Supposons que $x \leq a$. On sait que $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Or f est nulle en dehors de I donc en particulier f est nulle sur $] - \infty; x]$ dans ce cas précis.
Ainsi, $P(X \leq x) = 0$.

- Supposons que $x \geq b$. On sait que $P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$. Or f est nulle sur $[x; +\infty[$.
Ainsi, $P(X \geq x) = 0$.

□

Convention :

Sous les hypothèses de la propriété précédente, on peut donc affirmer qu'il est presque impossible que X prenne des valeurs inférieures à a ou des valeurs supérieures à b .

On autorise alors l'abus de langage suivant : « $X(\Omega) \subset I$ ».

Et si, sur l'intervalle I , f ne s'annule pas ou s'annule en des points isolés, on écrira même « $X(\Omega) = I$ ».

Exemples 5 :

- Exemple 2 : pour la VAR de l'exemple 2 on a $X(\Omega) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Exemple 3 : pour la VAR de l'exemple 3 on a $X(\Omega) = \mathbb{R}$.
- Exemple 4 : pour la VAR de l'exemple 4 on a $X(\Omega) = [0; +\infty[= \mathbb{R}^+$.

Théorème 4

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si :

- (i) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points,
- (ii) F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$,
- (iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$,
- (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une variable aléatoire à densité X définie sur cet espace, tels que F est la fonction de répartition de X .

De plus toutes les fonctions f positives ou nulles et telles que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, sont des densités de X .

Conseils méthodologiques :

Il faut bien noter la différence avec le théorème 1. Ici on ne sait pas que F est une fonction de répartition, il y a donc plus de choses à vérifier. Les deux derniers points sont automatiquement vérifiés lorsque F est une fonction de répartition.

Exemple 6 :

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1 - \sqrt{-x}}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1 + \sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité que l'on notera X et déterminer une densité de X .

- (i) Sur $] -\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, F est une fonction constante donc de classe $\mathcal{C}^1$. Sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$.
Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.
- (ii) D'après le point précédent F est aussi continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. La continuité ne pose problème qu'en -1 , 0 et 1 . Or :

$$\lim_{-1^-} F = \lim_{-1^+} F = 0 = F(-1) \quad \lim_{0^-} F = \lim_{0^+} F = \frac{1}{2} = F(0) \quad \lim_{1^-} F = \lim_{1^+} F = 1 = F(1)$$

Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

- (iii) Sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$:

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{-x}} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on voit que $F'(x) \geq 0$.

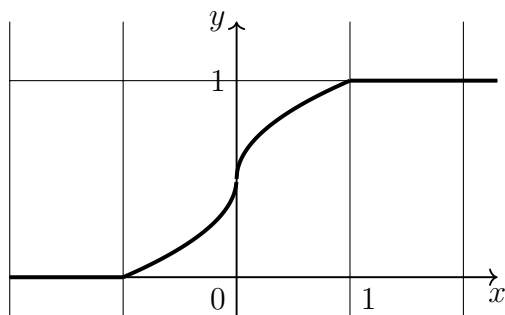
Cela nous permet de dire que F est croissante sur $] -\infty; -1[$, sur $] -1; 0[$, sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
(**ATTENTION** il est **INTERDIT** de dire qu'une fonction est croissante sur un domaine qui n'est pas **UN** intervalle.)

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, on peut ici affirmer que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

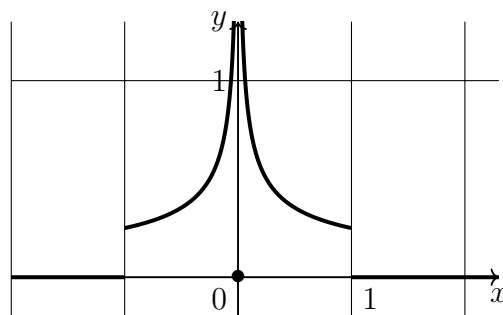
(iv) Enfin $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

On peut donc dire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Une densité de X s'obtient en utilisant la dérivée de F là où elle est définie et en « complétant » les point manquants par des valeurs positives ou nulles. Une densité de X est donc par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Représentation graphique de F



Représentation graphique de f

Remarque :

On fera bien **ATTENTION** à la différence d'énoncé entre l'exemple 3 et l'exemple 6!!!!

III Moments d'une variable à densité

1 Espérance

a Définition

Définition 3

Soit X une VAR de densité f .

On dit que **X admet une espérance** si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente.

L'espérance de X est alors le réel noté $E(X)$ défini par : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$.

Exemple 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X .
2. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
1. (i) Comme $x(1-x) \geq 0$ pour $x \in [0; 1]$, f est bien une fonction positive.
- (ii) De plus on vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- (iii) Sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 6x(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx.$$

$\int_{-\infty}^0 0 dx$ et $\int_1^{+\infty} 0 dx$ sont évidemment convergentes et $\int_0^1 6x(1-x) dx$ n'est pas une intégrale impropre donc elle est convergente.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 0 + \int_0^1 (6x - 6x^2) \, dx + 0 = [3x^2 - 2x^3]_0^1 = 1.$$

Donc f est une densité de probabilité et ainsi f est une densité d'une VAR X .

2. Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \, dx = \int_{-\infty}^0 0 \, dx + \int_0^1 6x^2(1-x) \, dx + \int_1^{+\infty} 0 \, dx.$$

$\int_{-\infty}^0 0 \, dx$ et $\int_1^{+\infty} 0 \, dx$ sont évidemment convergents. $\int_0^1 6x^2(1-x) \, dx$ n'est pas une intégrale impropre donc elle est convergente.

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \, dx$ est convergente et X admet donc une espérance. De plus :

$$E(X) = 0 + \int_0^1 (6x^2 - 6x^3) \, dx + 0 = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Exemple 8 :

Soit X une variable à densité dont une densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \, dx = \int_{-\infty}^1 0 \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx.$$

$\int_{-\infty}^1 0 \, dx$ est évidemment convergente.

On a vu plusieurs fois dans le chapitre sur les intégrales généralisées que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$ est divergente. (À vous de vérifier si vous savez bien le faire !)

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \, dx$ est divergente et donc X n'admet donc pas d'espérance.

b Propriétés

Propriété 2

Soit X une variable de densité f et admettant une espérance.

Si f est nulle en dehors d'un intervalle I alors $E(X) \in I$.

Propriété 3

Soit X une variable de densité f et a et b **deux réels**.

Si f est nulle en dehors de $[a; b]$ alors X admet une espérance et $E(X) \in [a; b]$.

Démonstration :

Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^a t \times 0 dt}_{\text{cvgte et } =0} + \int_a^b tf(t) dt + \underbrace{\int_b^{+\infty} t \times 0 dt}_{\text{cvgte et } =0}.$$

De plus $t \mapsto |tf(t)|$ est continue sur $[a; b]$ éventuellement privé d'un nombre fini de points et

$$\forall t \in [a; b], \quad |tf(t)| \leq \max(|a|, |b|)f(t).$$

Comme $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, par théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on peut affirmer que $\int_a^b tf(t) dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ainsi X admet une espérance et $E(X) = \int_a^b tf(t) dt$.

De plus :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a; b], \quad af(t) &\leq tf(t) \leq bf(t) \\ \implies \underbrace{a \int_a^b f(t) dt}_{=1} &\leq E(X) \leq b \underbrace{\int_a^b f(t) dt}_{=1} && \text{croissance de l'intégrale} \\ \implies a &\leq E(X) \leq b. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que $E(X) \in [a; b]$.

Conseils méthodologiques :

On peut utiliser cette propriété en exercice pour montrer rapidement que X admet une espérance lorsqu'une densité de f est nulle en dehors d'un segment. (On utilise plus rarement la deuxième partie de la propriété, on peut s'en servir pour vérifier la cohérence de nos calculs.)

On pourra adopter la rédaction suivante : « f est une densité nulle en dehors du segment $[a; b]$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente, c'est-à-dire X admet une espérance. »

Théorème 5 : Linéarité de l'espérance

- Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors pour tout réels a et b , $aX + b$ admet une espérance et $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- Soient X et Y deux VAR à densité admettant une espérance.
Alors $X + Y$ admet une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Remarques :

- Résultat admis en BCPST.
- Dans le deuxième point on ne dit pas que $X + Y$ est une variable à densité car ce n'est pas toujours le cas (par exemple $X + (-X) = 0$ est une variable finie donc pas à densité). Le théorème assure juste l'existence de l'espérance de $X + Y$.
- On verra plus loin dans le cours comment montrer que $aX + b$ est une variable à densité.

Théorème 6 : Théorème de transfert

Soient X une VAR de densité f et g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) dt$ est **absolument** convergente et dans ce cas :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) dt.$$

Définition 4

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre r , noté $m_r(X)$, si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$ est convergente et on a $m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$.

3 Variance et écart-type

Toutes les propriétés à connaître sur la variance ont été énoncées dans le chapitre « Concepts de base sur les variables aléatoires ».

Exemple 9 :

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 6x(1-x)$ si $x \in [0; 1]$ et $f(x) = 0$ sinon. Nous avons vu que $E(X) = \frac{1}{2}$.

X admet-elle une variance? Si oui, la calculer

Il nous reste ici à vérifier que X admet un moment d'ordre 2 et à le calculer. Sous réserve de convergence :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 6x^3(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx.$$

$\int_{-\infty}^0 0 dx$ et $\int_1^{+\infty} 0 dx$ sont évidemment convergentes. $\int_0^1 6x^3(1-x) dx$ n'est pas une intégrale impropre donc elle est convergente.

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ est convergente et X^2 admet donc une espérance. De plus :

$$E(X^2) = 0 + \int_0^1 (6x^3 - 6x^4) dx + 0 = \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{10}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, X admet une variance et on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

Exemple 10 :

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{2}{x^3}$ si $x \geq 1$.

X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.

Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx.$$

$\int_{-\infty}^1 0 dx$ est évidemment convergente et vaut 0.

De plus, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{2}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{x} \right]_1^A = 2$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$ est convergente et vaut 2.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est convergente ce qui signifie que X admet une espérance qui vaut

$$E(X) = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx = 2.$$

Sous réserve de convergence :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \, dx = \int_{-\infty}^1 0 \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{x} \, dx.$$

$\int_{-\infty}^1 0 \, dx$ est évidemment convergente et vaut 0.

$\int_1^{+\infty} \frac{2}{x} \, dx$ est divergente. (Ce n'est pas une intégrale de référence mais une nouvelle fois, je ne refais pas le calcul ici.)

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \, dx$ n'est pas convergente et ainsi X n'admet pas de moment d'ordre 2 et donc n'admet pas de variance.

IV Lois usuelles

1 Loi uniforme

Il s'agit ici de la loi la plus simple pour les variables aléatoires à densité. Elle correspond au fait de choisir au hasard un réel dans un segment $]a; b[$.

Définition 5

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur $]a; b[$** , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]a; b[)$, si une densité de X est la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in]a; b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{]a; b[}(t).$$

Remarque :

On peut rencontrer le vocabulaire et la notation pour une loi uniforme à densité sur $[a; b]$.

Propriété 4

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]a; b[$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}.$$

Démonstration :

Par définition de la densité, on sait que la fonction de répartition de X est donnée par $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$.

— Si $x < a$ sur $] -\infty; x]$ on a $f(t) = 0$ et donc alors $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \, dt = 0$.

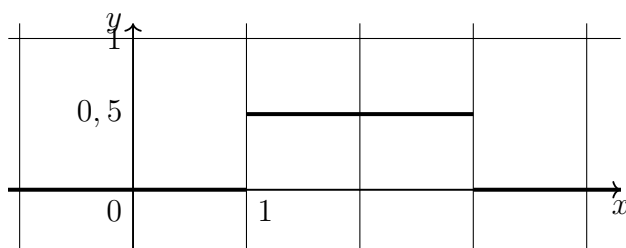
— Si $a \leq x \leq b$ alors $F(x) = \int_{-\infty}^a 0 \, dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} \, dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$.

— Si $x > b$ alors $F(x) = \int_{-\infty}^a 0 \, dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} \, dt + \int_b^x 0 \, dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^b + 0 = \frac{b-a}{b-a} = 1$.

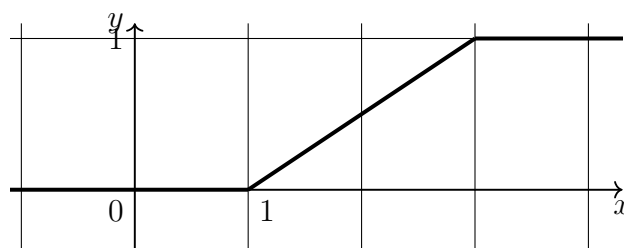
On a donc bien le résultat demandé.

□

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une VAR suivant une loi uniforme sur $[1; 3]$:



Densité de la loi $\mathcal{U}([1; 3])$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([1; 3])$

Théorème 7

Soit X une VAR à densité suivant une loi uniforme sur $[a; b]$.

Alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Démonstration :

Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{t}{b-a} dt + \int_b^{+\infty} 0 dt.$$

$\int_{-\infty}^a 0 dt$ et $\int_b^{+\infty} 0 dt$ sont évidemment convergentes et valent 0.

$t \mapsto \frac{t}{b-a}$ est continue sur $[a; b]$ donc $\int_a^b \frac{t}{b-a} dt$ n'est pas une intégrale impropre et est donc convergente. Donc X admet une espérance et :

$$E(X) = 0 + \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b + 0 = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Par définition de la variance, X admet une variance si, et seulement si, $(X - E(X))^2$ admet une espérance et dans ce cas $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

D'après le théorème de transfert, $(X - E(X))^2$ admet une espérance si, et seulement si,

$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt$ est absolument convergente.

Sous réserve de convergence (absolue) :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2 dt + \int_b^{+\infty} 0 dt.$$

$\int_{-\infty}^a 0 dt$ et $\int_b^{+\infty} 0 dt$ sont évidemment convergentes et valent 0.

$t \mapsto \frac{1}{b-a} \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2$ est continue sur $[a; b]$ donc $\int_a^b \frac{1}{b-a} \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2 dt$ n'est pas une intégrale impropre et est donc convergente.

Donc X admet une variance et

$$\begin{aligned}
V(X) &= 0 + \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^3 \right]_a^b + 0 = \frac{1}{3(b-a)} \left(\left(b - \frac{a+b}{2} \right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2} \right)^3 \right) \\
&= \frac{1}{3(b-a)} \left(\left(\frac{b-a}{2} \right)^3 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{3(b-a)} \times \frac{2(b-a)^3}{8} = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

□

2 Loi exponentielle

Définition 6

Soit λ un réel **strictement positif**. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi exponentielle de paramètre λ** , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(t).$$

Propriété 5

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Démonstration :

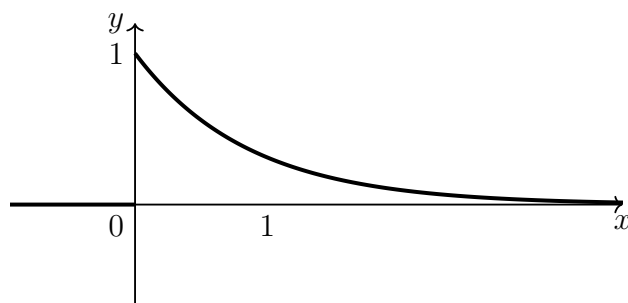
On a pour tout réel x , $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

— Si $x < 0$ alors pour tout $t \in]-\infty; x]$, $f(t) = 0$ et donc $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

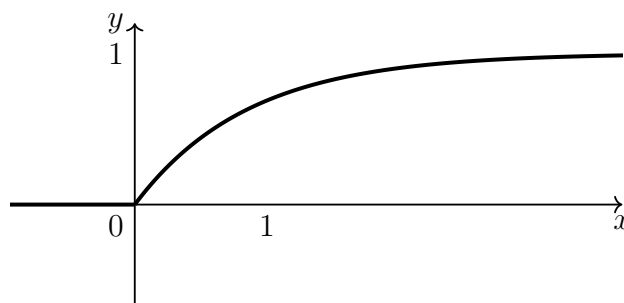
— Si $x \geq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

□

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(1)$:



Densité de la loi $\mathcal{E}(1)$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$

Théorème 8

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Démonstration :

Calculons uniquement l'espérance.

Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt.$$

$\int_{-\infty}^0 0 dt$ est évidemment convergente et vaut 0.

La fonction $t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$ est continue donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $A > 0$. Par IPP (à rédiger proprement) :

$$\int_0^A \lambda t e^{-\lambda t} dt = [-t e^{-\lambda t}]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda t} dt = -A e^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}.$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} -A e^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ donc $\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{\lambda}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est convergente donc X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

□

Remarque :

Il est astucieux de voir que dans ce théorème se cachent deux nouvelles intégrales de référence. On pourra donner la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ et $\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$ en se référant à l'espérance et au moment d'ordre 2 d'une VAR qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Théorème 9 : Caractérisation de la loi exponentielle

Soit X une variable à densité, qui n'est pas la variable certaine nulle et qui est à valeur dans $\mathbb{R}^+$.
 X suit une loi exponentielle si, et seulement si :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P_{[X \geq s]}(X \geq s + t) = P(X \geq t). \quad (1)$$

Remarque :

L'égalité (1) est équivalente à $P(X \geq s + t) = P(X \geq s)P(X \geq t)$.

Définition 7

Une variable à densité vérifiant l'égalité (1) est dite **sans mémoire**.

Démonstration :

Nous n'allons ici démontrer qu'un sens de l'équivalence :

Soit X suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Alors pour tout réels s et t positifs :

$$P_{[X \geq s]}(X \geq s + t) = \frac{P([X \geq s + t] \cap [X \geq s])}{P(X \geq s)} = \frac{P(X \geq s + t)}{P(X \geq s)}.$$

Or $P(X \geq s) = \int_s^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_s^{+\infty} = e^{-\lambda s}$ et de même $P(X \geq s + t) = e^{-\lambda(s+t)}$. Donc :

$$P_{[X \geq s]}(X \geq s + t) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X \geq t).$$

□

a Loi normale centrée réduite

Définition 8

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite** si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

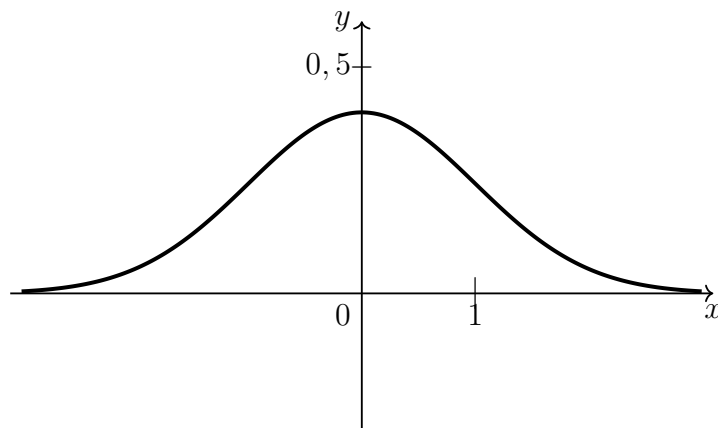
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque :

Pour vérifier que f est une densité de probabilité, il faut se souvenir que nous avons admis que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale centrée réduite :



Densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Définition 9

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est la fonction Φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Remarque :

La fonction de répartition d'une VAR suivant la loi normale centrée réduite ne peut pas s'exprimer avec les fonctions usuelles. La lettre Φ est une **notation universelle** pour se référer à cette fonction.

Il faudra bien savoir utiliser les propriétés que nous allons mettre ci-dessous.

Propriété 6

Soit Φ la fonction de répartition d'une VAR X suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors :

1. Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$;
2. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$;
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Démonstration :

1. La fonction Φ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de bijection monotone, Φ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$]\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x)[=]0; 1[,$$

d'après les propriétés d'une fonction de répartition d'une VAR.

2. On sait que $\Phi(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. On sait aussi que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$.

Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire, on a démontré dans le chapitre sur les intégrales que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On a donc bien $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

3. Tout repose encore ici sur le fait que la densité est paire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t) dt \\ &= \int_{+\infty}^x f(-u)(-du) && \text{changement de variable } u = -t, \mathcal{C}^1 \text{ et strictement décroissant} \\ &= \int_x^{+\infty} f(u) du = 1 - \Phi(x). \end{aligned}$$

□

Définition 10

- La fonction Φ^{-1} s'appelle la **fonction des quantiles**.
- Pour tout $\alpha \in]0; 1[$, on note $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ (notation universelle). Le réel u_α s'appelle le **quantile d'ordre α** .

Remarque :

Ce vocabulaire sera très important pour le chapitre sur les statistiques. Il est important de savoir trouver une valeur approchée de ces quantiles grâce à votre calculatrice ou à Python.

Théorème 10

Soit X qui suit une loi normale centrée réduite. Alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = 0 \quad V(X) = 1.$$

Démonstration :

On note f la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Montons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ est convergente.

La fonction $x \mapsto xf(x)$ est impaire. Il suffit donc de montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$.

Le problème se pose uniquement en $+\infty$.

$$\int_0^A xf(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - e^{-A^2/2} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ quand } A \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ est convergente et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ aussi.

X admet donc une espérance et $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \, dx = 0$ (car intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0).

Comme la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire, pour montrer que X admet un moment d'ordre 2, il suffit de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) \, dx$ est convergente.

Le problème se pose uniquement en $+\infty$. Par intégration par parties (avec les fonctions utilisées de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^2 f(x) \, dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-xe^{-x^2/2} \right]_0^A + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A e^{-x^2/2} \, dx \\ &= \frac{-Ae^{-A^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A e^{-x^2/2} \, dx \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} \, dx \text{ quand } A \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Or on sait que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) \, dx$ est convergente, donc X admet un moment d'ordre 2, et donc une variance, et d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 \int_0^{+\infty} x^2 f(x) \, dx = 1.$$

□

b Loi normale de Laplace-Gauss

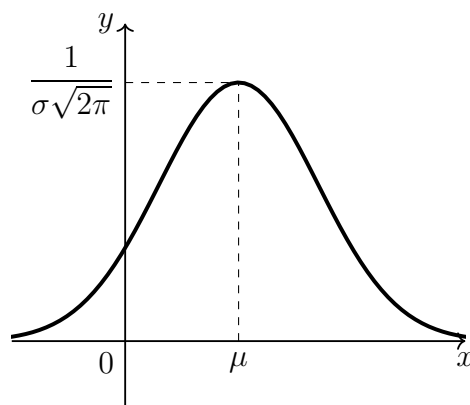
Définition 11

Soit μ un réel, et σ un réel strictement positif. On dit que X suit la **loi normale de paramètres (μ, σ^2)** si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale.



Densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Propriété 7

X suit une loi normale de paramètres (μ, σ^2) si, et seulement si, $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Remarque :

Cette propriété sera démontrée dans la partie suivante.

Théorème 11

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \mu \quad V(X) = \sigma^2.$$

Démonstration :

C'est immédiat avec la propriété précédente en écrivant $X = \sigma X^* + \mu$.

□

V Exemples de fonction d'une variable à densité

Le but de cette partie est, étant donné une variable à densité X , d'apprendre à déterminer la loi la variable $Y = g(X)$. La marche à suivre est la suivante :

1. Déterminer le support de $Y : Y(\Omega)$.
2. **Si $Y(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable :** cela signifie que Y est une VAR finie ou discrète, on détermine donc sa loi en calculant $P(Y = i)$ pour chaque i appartenant à $Y(\Omega)$.
3. **Si $Y(\Omega)$ n'est pas un ensemble fini ou dénombrable :** on essaye de montrer que Y est une variable à densité en suivant les étapes ci-dessous.
 - a) Calculer la fonction de répartition de Y (on aura besoin pour cela de la fonction de répartition de X).
 - b) Montrer que Y est une variable à densité en utilisant le théorème 1 ou en reconnaissant une loi usuelle.
 - c) Déterminer une densité de Y .

1 g est affine

Exemple 11 :

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1; 1]$. On considère la variable aléatoire $Y = 1 - 2U$. Déterminons la loi de Y .

— Étape 1 : support de Y

On remarque tout d'abord que $U(\Omega) = [-1; 1]$ donc $Y(\Omega) = [-1; 3]$.

Comme $Y(\Omega)$ n'est pas un ensemble fini ou discret on peut penser que Y va être une VAR à densité.

— Étape 2 : fonction de répartition de Y

Soit F_Y la fonction de répartition de Y . Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leq x)$.

Grâce à $Y(\Omega)$ on peut tout de suite affirmer que si $x < -1$, $F_Y(x) = 0$ (événement $[Y \leq x]$ impossible) et si $x > 3$, $F_Y(x) = 1$ (événement $[Y \leq x]$ certain).

Soit maintenant $x \in [-1; 3]$. On a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(1 - 2U \leq x) = P\left(U \geq \frac{1-x}{2}\right) = 1 - F_U\left(\frac{1-x}{2}\right).$$

Or on sait que $F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{t+1}{2} & \text{si } t \in [-1; 1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$.

Comme $x \in [-1; 3]$, $\frac{1-x}{2} \in [-1; 1]$. Donc $F_Y(x) = 1 - \frac{\frac{1-x}{2} + 1}{2} = \frac{x+1}{4}$.

En résumé $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

— **Étape 3 : vérifier que Y est une variable à densité**

On remarque que F_Y est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[-1; 3]$ donc on peut directement conclure que Y est une variable à densité qui suit la loi $\mathcal{U}([-1; 3])$.

Si on ne repère pas de loi usuelle, alors il faut montrer que F_Y est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points et $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

— **Étape 4 : donner une densité de Y**

On connaît une densité d'une loi uniforme donc une densité de Y est $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Si on a pas repéré de loi usuelle, une densité de Y s'obtient en dérivant G là où c'est possible et en complétant les points manquants par une valeur arbitraire positive ou nulle.

Avec la même méthode que dans cet exemple on peut démontrer la propriété 7 qui montre que toutes les lois normales sont liées à la loi normale centrée réduite :

Démonstration de la propriété 7 :

— Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}$, on a $X^*(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit F_{X^*} la fonction de répartition de X^* .

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F_{X^*}(x) &= P(X^* \leq x) \\ &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq x\right) \\ &= P(X \leq \sigma x + \mu) && \text{car } \sigma > 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\sigma x + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt. \end{aligned}$$

On pose alors $u = \frac{t - \mu}{\sigma}$. Ce changement de variable est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; \sigma x + \mu]$ et strictement croissant.

On a de plus $du = \frac{dt}{\sigma}$ et u varie entre $-\infty$ et x .

On obtient donc $F_{X^*}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$. On reconnaît la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Ainsi, X^* suit bien une loi normale centrée réduite.

— Supposons que $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Comme $X^*(\Omega) = \mathbb{R}$, on a $X(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit F_X la fonction de répartition de X .

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= P(\sigma X^* + \mu \leq x) && \text{car } X = \sigma X^* + \mu \\
&= P\left(X^* \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) && \text{car } \sigma > 0 \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt
\end{aligned}$$

On pose alors $u = \sigma t + \mu$. Ce changement de variable est $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\infty; \frac{x - \mu}{\sigma}\right]$ et strictement croissant.

On a de plus $du = \sigma dt$ et u varie entre $-\infty$ et x .

On obtient donc $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) du$. On reconnaît la fonction de répartition de la loi normale de paramètres μ et σ^2 .

Ainsi, X suit bien une loi normale de paramètres μ et σ^2 .

□

Propriété 8

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $aX + b$ (avec $a \neq 0$) suit la loi normale $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

2 Fonction carrée

Exemple 12 :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1; 1]$.

On considère la variable aléatoire $Y = X^2$. Déterminons la loi de Y .

— Étape 1 : support de Y

Comme $X(\Omega) = [-1; 1]$, on a $Y(\Omega) = [0; 1]$.

— Étape 2 : fonction de répartition de Y

Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leq x)$

Grâce à $Y(\Omega)$ on peut tout de suite affirmer que si $x < 0$, $F_Y(x) = 0$ (événement $[Y \leq x]$ impossible) et si $x > 1$, $F_Y(x) = 1$ (événement $[Y \leq x]$ certain).

Soit maintenant $x \in [0; 1]$. On a

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) \\
&= P(|X| \leq \sqrt{x}) && \text{racine carrée strict. croiss. sur } \mathbb{R}^+ \\
&= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) && \text{pte de la valeur absolue} \\
&= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) && \text{car } X \text{ VAR à densité} \\
&= \frac{\sqrt{x} - (-1)}{1 - (-1)} - \frac{-\sqrt{x} - (-1)}{1 - (-1)} && \sqrt{x} \in [0; 1] \subset [-1; 1] \text{ et } -\sqrt{x} \in [-1; 0] \subset [-1; 1] \\
&= \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

$$\text{En résumé } F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0; 1]. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

— **Étape 3 : vérifier que Y est une variable à densité**

La fonction $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty; 0[$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1]$.

La fonction $x \mapsto 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$.

Donc F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Par conséquent F_Y est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x) = F_Y(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} F_Y(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_Y(x) = F_Y(1)$.

Donc F_Y est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

On en déduit donc que Y est bien une variable à densité.

— **Étape 4 : donner une densité de Y**

Une densité de Y s'obtient en dérivant F_Y là où c'est possible et en complétant les points manquants par une valeur arbitraire positive ou nulle.

Donc en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ on obtient une densité de Y .

3 Fonction exponentielle

Exemple 13 :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

On considère la variable aléatoire $Y = e^X$. Montrons que Y est une variable à densité et déterminons une densité de Y .

— **Étape 1 : support de Y**

Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}$, on a $Y(\Omega) =]0; +\infty[$.

— **Étape 2 : fonction de répartition de Y**

On note usuellement Φ la fonction de répartition de X . On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Calculons la fonction de répartition de Y : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x)$.

Si $x \leq 0$, $F_Y(x) = 0$ car l'événement $[Y \leq x]$ est impossible.

Soit maintenant $x > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) \\ &= P(X \leq \ln(x)) && \ln \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*} \\ &= \Phi(\ln(x)). \end{aligned}$$

En résumé $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

— **Étape 3 : vérifier que Y est une variable à densité**

La fonction $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty; 0]$ donc F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty; 0]$.

Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $u \mapsto \Phi(u)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur, respectivement, $]0; +\infty[$ et $\mathbb{R}$. Par composée, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

En résumé F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

F_Y est donc aussi continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 = F_Y(0)$.

Et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(\ln(x)) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \Phi(u) = 0$.

Donc F_Y est continue en 0 et ainsi F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que Y est bien une variable à densité.

— **Étape 4 : donner une densité de Y**

On sait qu'une densité de Y vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_Y(x) = F'_Y(x)$. On complète en 0 par une valeur arbitraire positive et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

4 *Fonction partie entière*

Exemple 14 :

On considère une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre 3 et la variable aléatoire $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Déterminons la loi de Y .

— **Étape 1 : support de Y**

On sait que $X(\Omega) = [0; +\infty[$, donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

On remarque que $Y(\Omega)$ est un ensemble dénombrable donc Y est une VAR discrète.

— **Étape 2 : loi de Y**

Soit $k \in Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\lfloor X \rfloor + 1 = k) = P(\lfloor X \rfloor = k - 1) = P(k - 1 \leq X < k) \\ &= \int_{k-1}^k 3e^{-3x} dx = e^{-3(k-1)} - e^{-3k} = e^{-3(k-1)}(1 - e^{-3}) \end{aligned}$$

En résumé : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(Y = k) = e^{-3(k-1)}(1 - e^{-3})$. Y suit en fait une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-3}$.

VI Somme de variables à densité indépendantes

Définition 12

Soient f et g deux densités de probabilité. La fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$ (lorsque cette intégrale est bien convergente) s'appelle le **produit de convolution de f et g** . On la note $f * g$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Théorème 12 : Loi de la somme de 2 variables à densité indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes. On note f une densité de X et g une densité de Y .

La variable aléatoire $Z = X + Y$ est une variable à densité dont une densité est la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Remarques :

— Résultat admis en BCPST.

— La formule du produit de convolution sera **TOUJOURS** rappelée dans les énoncés. Suivant la forme de l'énoncé proposé par le sujet de concours, il sera attendu ou non de justifier la convergence de cette intégrale impropre.

Exemple 15 :

On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi uniforme sur $[1; 3]$ et Y suit la loi exponentielle de paramètre 2.

Déterminons une densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Notons f une densité de X et g une densité de Y . On a :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in [1; 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[1;3]}(t) \quad g(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = 2e^{-2t} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t).$$

On sait que, comme X et Y sont des variables à densité indépendantes, sous réserve de convergence de l'intégrale ci-dessous, Z est une variable à densité dont une densité est la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) \, dt.$$

Calculons $h(x)$. Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[1;3]}(t) \times 2e^{-2(x-t)} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x-t) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x-t)} \mathbb{1}_{[1;3]}(t) \times \mathbb{1}_{]-\infty;x]}(t) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x-t)} \mathbb{1}_{[1;3] \cap]-\infty;x]}(t) \, dt. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant mettre en place une discussion suivant la valeur de x pour déterminer la valeur de $[1; 3] \cap]-\infty; x]$.

- Si $x < 1$, $[1; 3] \cap]-\infty; x] = \emptyset$, donc $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x-t)} \times 0 \, dt = 0$.
- Si $x \in [1; 3]$, $[1; 3] \cap]-\infty; x] = [1; x]$ donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x-t)} \mathbb{1}_{[1;x]}(t) \, dt = \int_1^x e^{-2(x-t)} \, dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{-2(x-t)} \right]_1^x = \frac{1 - e^{-2(x-1)}}{2}. \end{aligned}$$

- Si $x > 3$, $[1; 3] \cap]-\infty; x] = [1; 3]$ donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x-t)} \mathbb{1}_{[1;3]}(t) \, dt = \int_1^3 e^{-2(x-t)} \, dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{-2(x-t)} \right]_1^3 = \frac{e^{-2(x-3)} - e^{-2(x-1)}}{2}. \end{aligned}$$

En résumé h est bien définie et $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1 - e^{-2(x-1)}}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{e^{-2(x-3)} - e^{-2(x-1)}}{2} & \text{si } x > 3 \end{cases}.$

Exemple 16 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathbb{1}_{]-1;1]}(t)$.

Tentons de calculer $(f * f)(0)$. Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}(f * f)(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(-t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 \, dt \text{ car } f \text{ est paire} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1-t^2} \, dt\end{aligned}$$

Cette intégrale est impropre en -1 et en 1 . Étudions par exemple le problème en 1 :

$$\int_0^a \frac{1}{1-t^2} \, dt = \int_0^a \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t} \, dt = -\frac{1}{2} \ln |1-a| + \frac{1}{2} \ln |1+a| \rightarrow +\infty \text{ quand } a \rightarrow 1.$$

L'intégrale proposée est donc divergente. $(f * f)(0)$ n'est pas défini.

Propriété 9

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Alors $X + Y$ est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Ce résultat se généralise au cas de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale.

Démonstration :

Démontrons uniquement un cas particulier : on considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X et Y suivent la loi normale centrée réduite.

Déterminons une densité de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Notons f une densité de X et de Y . On a :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

On sait que, comme X et Y sont des variables à densité indépendantes, donc Z est une variable à densité dont une densité est la fonction h définie par :

$$\begin{aligned}h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+tx-\frac{x^2}{2}} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x/2)^2+\frac{x^2}{4}} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-(x/2))^2} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-(x/2))^2}{2 \times 1/2}} \, dt}_{\text{densité de la loi } \mathcal{N}\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \times 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{2})^2}}.\end{aligned}$$

Z suit donc la loi normale de paramètres $(0, 2)$.

□