Vocabulaire sur les suites

— **Suite réelle** : application de I dans $\mathbb{R}$, où I est une partie de $\mathbb{N}$.

— **Terme général d'une suite** : c'est l'image de l'entier $n \in I$ par l'application u. Au lieu de le noter $u(n)$ on le note u_n.

— **Suite majorée** : $(u_n)_{n\in I}$ est majorée si, et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : pour tout $n \in I$, $u_n \leqslant K$.

— **Suite minorée** : $(u_n)_{n\in I}$ est minorée si, et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : pour tout $n \in I$, $u_n \geqslant K$.

— **Suite bornée** : se dit d'une suite qui est à la fois majorée et minorée.

— **Suite croissante** : $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si, et seulement si, pour tout $n \in I$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

— **Suite décroissante** : $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si, et seulement si, pour tout $n \in I$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

— **Suite stationnaire** : c'est une suite constante à partir d'un certain rang :

$$\exists n_0 \in I \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0,\, u_n = u_{n_0}.$$

— **Suite convergente** : si, et seulement si, la suite admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.
C'est équivalent à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

— **Suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$:** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si :

$$\forall A > 0 \text{ (resp. } B < 0), \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant A \text{ (resp. } u_n \leqslant B).$$

— **Suite divergente** : si, et seulement si, la suite n'admet pas de limite ou admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite en $+\infty$.

— **Suite arithmétique** : si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ avec r un réel ne dépendant pas de n.

— **Suite géométrique** : si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$ avec q un réel ne dépendant pas de n.

— **Suite arithmético-géométrique** : si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$ avec a et b deux réels ne dépendant pas de n, $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

— **Suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2** : (on peut abréger en « suites récurrentes linéaire d'ordre 2 ») si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n$ avec a et b deux réels ne dépendant pas de n et $b \neq 0$.

— **Suites adjacentes** : deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si, et seulement si, l'une est croissante, l'autre et décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

— **Suites équivalentes** : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si, et seulement si, elles sont non nulles à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
On note $u_n \sim v_n$.

Attention : la notion de continuité ou dérivabilité **n'existe pas** pour les suites.

$\boxed{\textit{Sommes finies remarquables}}$

— Si $q \neq 1$ ($q \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et si n et p sont deux entiers naturels ($p \leqslant n$),

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

On pourra aussi retenir cette formule sous la forme :

Si $\square \in \mathbb{N}$ et $\star \in \mathbb{N}$ avec $\square \leqslant \star$,

$$\sum_{k=\square}^{\star} q^k = q^{\square} \times \frac{1-q^{\star-\square+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. (formule encore vraie si la somme démarre à $k=0$)

On pourra aussi retenir cette formule sous la forme :

$$\text{Si } \square \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{\square} k = \frac{\square \times (\square+1)}{2}.$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (formule encore vraie si la somme démarre à $k=0$)

On pourra aussi retenir cette formule sous la forme :

$$\text{Si } \square \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{\square} k^2 = \frac{\square \times (\square+1) \times (2 \times \square + 1)}{6}.$$

— **Formule du binôme** : si $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

— **Sommes télescopiques :** si n et p sont deux entiers naturels ($p \leqslant n$),

$$\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p.$$

Propriétés et théorèmes importants

— Toute suite convergente est bornée.

— **Théorème de la limite monotone** :

  * Toute suite croissante et majorée est convergente.
  * Toute suite décroissante et minorée est convergente.

— **Propriété des gendarmes** : **Si** $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ w_n \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

(ℓ peut être un réel ou être égal à $\pm\infty$)

— **Divergence et inégalités** :

  * **Si** $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
  * **Si** $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ v_n \leqslant u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

— **Limites et inégalités** : s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite finie alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

— **Signe d'une suite de limite non nulle** : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (limite finie ou infinie).
Si $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$ (resp. $\ell < 0$ ou $\ell = -\infty$) **alors** il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n > 0$ (resp. $u_n < 0$).

— **Suites adjacentes** : Si u et v sont deux suites adjacentes alors u et v sont convergentes et ont la même limite.

— **Suites extraites** : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente **si, et seulement si**, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont la même limite.

— **Croissances comparées** : soient α et β deux réels strictement positifs et q un réel strictement supérieur à 1. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\alpha(n)}{n^\beta} = 0 \ ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{q^n} = 0 \ ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \ ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

— **Opérations autorisées sur les équivalents** : toutes les suites considérées sont non nulles à partir d'un certain rang.

  * $u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n w_n \sim v_n w_n$;
  * $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ w_n \sim z_n \end{cases} \Longrightarrow u_n w_n \sim v_n z_n$;
  * Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est **constant**, alors : $u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$;
  * $u_n \sim v_n \Longrightarrow \dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.

Les sommes ou différences d'équivalents sont INTERDITES.

— **Résultats importants** : toutes les suites considérées sont non nulles à partir d'un certain rang.

  * Lorsque $\underline{\ell \in \mathbb{R}^*}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow u_n \sim \ell$.
  * **SI** $u_n \sim v_n$ **ALORS** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ (lorsque les limites existent). (Réciproque en général fausse)

— **Équivalents classiques** : **Si** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$, alors :

$$\ln(1+u_n) \sim u_n \ ; \qquad \mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n \ ; \qquad \sin(u_n) \sim u_n \ ;$$

$$\tan(u_n) \sim u_n \ ; \qquad \cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2} \ ; \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Méthode : terme général d'une suite remarquable

— **Calcul du terme général d'une suite arithmétique** :
  * Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r alors : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 + nr.$
  * Si la suite n'est définie qu'à partir du rang p alors on a : $\forall n \geqslant p,\quad u_n = u_p + (n-p)r.$

— **Calcul du terme général d'une suite géométrique** :
  * Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 q^n.$
  * Si la suite n'est définie qu'à partir du rang p alors on a : $\forall n \geqslant p,\quad u_n = u_p q^{n-p}.$

— **Calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique** :
  * On commence par déterminer le réel ℓ tel que $\ell = a \times \ell + b$.
  * On considère ensuite la suite auxiliaire définie par $w_n = u_n - \ell$. On montre que cette suite est géométrique puis on termine en exploitant la méthode de calcul du terme général d'une suite géométrique.

— **Calcul du terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2** :
On s'intéresse à l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence :

$$x^2 = ax + b.$$

  — Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$
  — Si l'équation caractéristique n'admet qu'une solution réelle r_0 alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (A + Bn)r_0^n.$$
  — Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes non réelles $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \rho^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)).$$

On détermine ensuite les valeurs de A et B grâce aux valeurs des deux premiers termes de la suite (souvent u_0 et u_1 mais attention à bien lire l'énoncé).