ENS filière BCPST 2021

Partie I :

1. a) Racines de P_0 : 1 et $\dfrac{1}{2}$. Racines de P_1 : 0 et $\dfrac{1}{2}$. Racines de P_2 : 0 et 1.

$\displaystyle\int_0^1 P_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$, $\displaystyle\int_0^1 P_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$, $\displaystyle\int_0^1 P_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

b) Montrons que la famille (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\mathrm{rg}(P_0,P_1,P_2) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(P_0,P_1,P_2)\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 3.$$

Donc (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ainsi, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe un unique triplet (a,b,c) de réels tels que $Q = aP_0 + bP_1 + cP_2$.

En évaluant cette égalité en 0, on obtient $Q(0) = a$, en 1, on obtient $b = Q(1)$ et en $\dfrac{1}{2}$, on obtient $c = Q(1/2)$.

On a donc :

$$\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = Q(0)\int_0^1 P_0(x)\,\mathrm{d}x + Q(1)\int_0^1 P_1(x)\,\mathrm{d}x + Q(1/2)\int_0^1 P_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(Q(0)+Q(1)+4Q(1/2)).$$

2. Le changement de variable proposé est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$, on a $\mathrm{d}y = (d-c)\,\mathrm{d}x$ et y varie de c à d quand x varie de 0 à 1, donc :

$$\begin{aligned}\int_c^d P(y)\,\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left[P(c)+P(d)+4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right] &= \int_0^1 P\left((d-c)x+c\right)(d-c)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{(d-c)}{6}\left[P(c)+P(d)+4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right] \\ &= (d-c)\left(\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\left[Q(0)+Q(1)+4Q(1/2)\right]\right),\end{aligned}$$

en posant $Q(x) = P\left((d-c)x+c\right)$ qui est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

D'après la question précédente, on a donc $\displaystyle\int_c^d P(y)\,\mathrm{d}y - \frac{(d-c)}{6}\left[P(c)+P(d)+4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right] = 0$.

3. Comme g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis.

On sait donc qu'il existe $c \in]x;y[$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}$.

Or la fonction g' est continue sur le segment $[a;b]$ donc elle est bornée sur ce segment. Notons M un réel strictement positif tel que $\forall t \in [a;b]$, $|g'(t)| \leqslant M$.

On a donc $|g'(c)| = \dfrac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \leqslant M$ et ainsi $|g(x)-g(y)| \leqslant M|x-y|$ par multiplication par $|x-y| > 0$.

4. a) La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[a;b]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_c^x f(y)\,\mathrm{d}y$ est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a;b]$. Par composée avec la fonction affine $h \mapsto c+h$, allant de $[0;d-c]$ dans $[c,d] \subset [a;b]$, la fonction $h \mapsto \displaystyle\int_c^{c+h} f(y)\,\mathrm{d}y$ est de classe $\mathscr{C}^4$ (et donc $\mathscr{C}^3$) sur $[0;d-c]$.

Par composée et produit de fonction $\mathscr{C}^3$, la fonction $h \mapsto \dfrac{h}{6}\left[f(c)+f(c+h)+4f\left(c+\dfrac{h}{2}\right)\right]$ est $\mathscr{C}^3$ sur $[0;d-c]$.

Ainsi, ϕ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[0; d-c]$ et :

$$\phi'(h) = f(c+h) - \frac{1}{6}\left[f(c) + f(c+h) + 4f\left(c+\frac{h}{2}\right)\right] - \frac{h}{6}\left[f'(c+h) + 2f'\left(c+\frac{h}{2}\right)\right]$$
$$\phi''(h) = f'(c+h) - \frac{2}{6}\left[f'(c+h) + 2f'\left(c+\frac{h}{2}\right)\right] - \frac{h}{6}\left[f''(c+h) + f''\left(c+\frac{h}{2}\right)\right]$$
$$\phi'''(h) = f''(c+h) - \frac{1}{2}\left[f''(c+h) + f''\left(c+\frac{h}{2}\right)\right] - \frac{h}{6}\left[f'''(c+h) + \frac{1}{2}f'''\left(c+\frac{h}{2}\right)\right]$$

b) On remarque que $\phi'''(h) = \frac{1}{2}\left[f''(c+h) - f''\left(c+\frac{h}{2}\right)\right] - \frac{h}{6}\left[f'''(c+h) + \frac{1}{2}f'''\left(c+\frac{h}{2}\right)\right]$.
D'après la question 3., que l'on peut appliquer à f'' qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$, il existe M_1 tel que :

$$\forall h \in [0; d-c], \qquad \left|f''(c+h) - f''\left(c+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant M_1 \times \frac{h}{2}.$$

La fonction f''' étant continue sur le segment $[a; b]$, elle est bornée sur ce segment par un certain M_2. On en déduit donc que :

$$\forall h \in [0; d-c], \qquad |\phi'''(h)| \leqslant \frac{M_1 h}{4} + \frac{h}{6}\left(M_2 + \frac{1}{2}M_2\right).$$

En posant $M = \frac{M_1 + M_2}{4}$, on obtient $\forall h \in [0; d-c]$, $|\phi'''(h)| \leqslant Mh$.

c) Pour cette question et les suivantes il faut remarquer que $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = \phi'''(0) = 0$.
On peut alors écrire, $\forall h \in [0; d-c]$:

$$|\phi''(h)| = \left|\int_0^h \phi'''(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^h |\phi'''(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_0^h Mx\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}h^2.$$

On a pu intégrer car les bornes de l'intégrale sont « dans le bon sens ».

d) En répétant ce qu'on vient de faire on a $|\phi'(h)| \leqslant \frac{M}{6}h^3$ et $|\phi(h)| \leqslant \frac{M}{24}h^4$.
En appliquant ceci pour $h = d - c$ on obtient le résultat demandé.

5. On pose $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour $i \in [\![1; n]\!]$. D'après la question précédente appliquée pour $c = a_i$ et $d = a_{i+1}$ on a :

$$\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{(b-a)}{6n}f_i\right| \leqslant \frac{M(b-a)^4}{24n^4}.$$

En remarquant que $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(y)\,\mathrm{d}y$ et en utilisant l'inégalité triangulaire on a :

$$\left|\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{(b-a)}{6n}\sum_{i=0}^{n-1} f_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{(b-a)}{6n}f_i\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(y)\,\mathrm{d}y - \frac{(b-a)}{6n}f_i\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M(b-a)^4}{24n^4} = \frac{M(b-a)^4}{24n^4} \times n = \frac{M(b-a)^4}{24n^3}.$$

Partie II :
Questions préliminaires :

a. *On peut remarquer que cette question est en fait la démonstration de la loi faible des grands nombres. Étant donné la formulation, l'énoncé attend très probablement une démonstration détaillée.*

Par linéarité de l'espérance, $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \mu$, et par propriétés de la variance et indépendance des (X_i), on a

$$V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchbychev appliquée à la VAR $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ qui admet bien une espérance et une variance non nulle, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Une probabilité étant toujours positive, par encadrement de limites on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

b. On remarque que $Y_i = \frac{X_i+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. De plus, comme les (X_i) sont mutuellement indépendantes, par propriété de cours (lemme des coalitions), les (Y_i) sont mutuellement indépendantes.

On peut donc affirmer que $\sum_{i=1}^{n}Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

Notons dans cette question $B_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i+1}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right| \geqslant 1\right) &= P\left(\left|\frac{2}{n}B_n - 1\right| \geqslant 1\right) \\
&= P\left(B_n \geqslant n\right) + P\left(B_n \leqslant 0\right) \\
&= P(B_n = n) + P(B_n = 0) = 2 \times \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{n}\ln\left(P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right| \geqslant 1\right)\right) = \frac{\ln(2)}{n} - \ln(2) \to -\ln(2)$, quand n tend vers $+\infty$.

Retour au cas général

1. a) Encore une fois c'est une propriété de cours (lemme des coalitions).

   b) On remarque que $\left[\sum_{i=1}^{n}X_i \geqslant \varepsilon_1\right] \cap \left[\sum_{i=n+1}^{n+q}X_i \geqslant \varepsilon_2\right] \subset \left[\sum_{i=1}^{n+q}X_i \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right]$.

   Par croissance de l'application P, $P\left(\left[\sum_{i=1}^{n}X_i \geqslant \varepsilon_1\right] \cap \left[\sum_{i=n+1}^{n+q}X_i \geqslant \varepsilon_2\right]\right) \leqslant P\left(\sum_{i=1}^{n+q}X_i \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)$.

   Et d'après la question précédente, les événements $\left[\sum_{i=1}^{n}X_i \geqslant \varepsilon_1\right]$ et $\left[\sum_{i=n+1}^{n+q}X_i \geqslant \varepsilon_2\right]$ sont indépendants donc

$$P\left(\left[\sum_{i=1}^{n}X_i \geqslant \varepsilon_1\right] \cap \left[\sum_{i=n+1}^{n+q}X_i \geqslant \varepsilon_2\right]\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i \geqslant \varepsilon_1\right) \times P\left(\sum_{i=n+1}^{n+q}X_i \geqslant \varepsilon_2\right).$$

   On a bien montré l'inégalité demandée.

2. Pour tout $(n,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\begin{aligned} u_{n+q} = P\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geqslant (n+q)(\varepsilon+\mu)\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{n+q} X_i \geqslant n(\varepsilon+\mu) + q(\varepsilon+\mu)\right) \\ &\geqslant \underbrace{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant n(\varepsilon+\mu)\right)}_{u_n} \underbrace{P\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geqslant q(\varepsilon+\mu)\right)}_{u_q}, \end{aligned}$$

car, d'après le résultat admis, $P\left(\sum_{i=n+1}^{n+q} X_i \geqslant q(\varepsilon+\mu)\right) = P\left(\sum_{i=1}^{q} X_i \geqslant q(\varepsilon+\mu)\right) = u_q$.

3. On suppose donc que $u_1 > 0$. Or, d'après la question précédente, par une récurrence rapide, on a $u_n \geqslant (u_1)^n$. Donc $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
Pour tout $(n,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\alpha_{n+q} = -\ln(u_{n+q}) \leqslant -\ln(u_n u_q) = \alpha_n + \alpha_q.$$

Et $u_{n+q} \leqslant 1$ donc $\alpha_{n+q} \geqslant 0$.

4. D'après le théorème de la division euclidienne, on sait qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tels que $k = aq + b$ et $0 \leqslant b < q$.
On peut déduire de la question précédente, par une récurrence rapide sur m, que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall (n,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \alpha_{mn+q} \leqslant m\alpha_n + \alpha_q.$$

Ainsi, pour $b \neq 0$:

$$\alpha_k \leqslant a\alpha_q + \alpha_b \Rightarrow \frac{\alpha_k}{k} \leqslant \frac{a}{k}\alpha_q + \frac{\alpha_b}{k}.$$

Or $a = \dfrac{k-b}{q} \leqslant \dfrac{k}{q}$, donc $\dfrac{\alpha_k}{k} \leqslant \dfrac{\alpha_q}{q}$.
Et, par définition de β_q, $\dfrac{\alpha_b}{k} \leqslant \dfrac{\beta_q}{k}$.
On peut aussi montrer que $\alpha_{mn} \leqslant m\alpha_n$ donc l'inégalité est encore vraie si $b = 0$.
Ainsi, $\dfrac{\alpha_k}{k} \leqslant \dfrac{\alpha_q}{q} + \dfrac{\beta_q}{k}$.

5. Pour tout $k \geqslant n$, $\dfrac{\alpha_k}{k} \leqslant \dfrac{\alpha_q}{q} + \dfrac{\beta_q}{n}$.
Le sup étant le plus petit des majorant, on en déduit que

$$S_n \leqslant \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\beta_q}{n}. \qquad (*)$$

De plus $\left\{\dfrac{\alpha_k}{k}, k \geqslant n+1\right\} \subset \left\{\dfrac{\alpha_k}{k}, k \geqslant n\right\}$, donc $S_{n+1} \leqslant S_n$.
La suite (S_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.
En passant à la limite dans l'inégalité $(*)$ on obtient $\lim_{n\to+\infty} S_n \leqslant \dfrac{\alpha_q}{q}$.

6. Notons $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. D'après les questions précédentes, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$: $S \leqslant \dfrac{\alpha_q}{q}$. L'inf étant le plus grand des minorants, on en déduit que :

$$S \leqslant \inf\left\{\frac{\alpha_q}{q}, q \geqslant 1\right\}.$$

Mais on a aussi, par définition de S_n et de la borne inf, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\inf\left\{\frac{\alpha_k}{k}, k \geqslant 1\right\} \leqslant \frac{\alpha_q}{q} \leqslant S_q.$$

On en déduit que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $S \leqslant \dfrac{\alpha_q}{q} \leqslant S_q$, et ainsi, par théorème d'encadrement de limites (théorème des gendarmes), $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = S$.

7. Comme on a supposé que $P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\leqslant x\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\geqslant -x\right)$, on a :

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right|\geqslant \varepsilon\right)=2u_n.$$

Donc $-\frac{1}{n}\ln\left[P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right|\geqslant \varepsilon\right)\right]=-\frac{1}{n}\ln(2u_n)=-\frac{\ln(2)}{n}+\frac{\alpha_n}{n}$.

Comme $\frac{\ln(2)}{n}\to 0$ et $\frac{\alpha_n}{n}$ admet une limite, on en déduit que $-\frac{1}{n}\ln\left[P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right|\geqslant \varepsilon\right)\right]$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ (qui est la limite de $\frac{\alpha_n}{n}$).

On retrouve bien ici le résultat de la question préliminaire b.

Par rapport à la question préliminaire a., on obtient quelque chose de plus « précis », car en notant $\ell=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{n}$, on peut réécrire ce qu'on vient de démontrer sous la forme :

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right|\geqslant \varepsilon\right)=\mathrm{e}^{-n\ell+o(n)},$$

ce qui nous indique une convergence très rapide vers 0 lorsque $\ell\neq 0$, une convergence exponentielle.

Partie III :

1. On considère la fonction $f : p\mapsto \mathrm{e}^{py+(1-p)z}-p\mathrm{e}^{y}-(1-p)\mathrm{e}^{z}$ définie sur $[0;1]$.
   $f'(p)=(y-z)\mathrm{e}^{py+(1-p)z}-\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{z}$ et $f''(p)=(y-z)^2\mathrm{e}^{py+(1-p)z}$.
   $f''(p)\geqslant 0$ donc f' est strictement croissante sur $[0;1]$.
   On remarque alors que $f'(0)=(y-z)\mathrm{e}^{z}-(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{z})$ et d'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction exponentielle entre y et z, il existe c, compris entre y et z, tel que $\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{c}(y-z)$.
   Donc $f'(0)=(y-z)(\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{c})$. Si $y\leqslant z$, $e^c\leqslant \mathrm{e}^{z}$ et donc $f'(0)\leqslant 0$. De même, si $y\geqslant z$, $\mathrm{e}^{c}\geqslant \mathrm{e}^{z}$ donc on a encore $f'(0)\leqslant 0$.
   De même, on montre que $f'(1)\geqslant 0$.
   D'après le corollaire du TVI, il existe un unique réel p_0 tel que $f'(p_0)=0$.
   f' étant croissante, elle est négative sur $[0;p_0]$ et positive sur $[p_0;1]$ donc f est décroissante sur $[0;p_0]$ et croissante sur $[p_0;1]$.
   Pour finir, $f(0)=f(1)=0$ donc f est négative sur $[0;1]$.
   On a bien l'inégalité demandée.

2. On utilise l'inégalité de la question précédente avec $p=\frac{x_2-X}{x_2-x_1}$, $y=tx_1$ et $z=tx_2$ qui satisfont bien aux hypothèses demandées. (en particulier $p\in[0;1]$ grâce à la hypothèse faite sur X qui prend ses valeurs entre x_1 et x_2)
   $\mathrm{e}^{tX}\leqslant\frac{x_2-X}{x_2-x_1}\mathrm{e}^{tx_1}+\frac{X-x_1}{x_2-x_1}\mathrm{e}^{tx_2}$.
   Par croissance de l'espérance, et linéarité de l'espérance on obtient l'inégalité demandée.

3. a) La fonction $t\mapsto -t(\mu-x_1)-\frac{(x_2-x_1)^2t^2}{8}$ est polynômiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.
   La fonction $t\mapsto\frac{x_2-\mu+(\mu-x_1)\mathrm{e}^{t(x_2-x_1)}}{x_2-x_1}$ est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. Il reste à vérifier que cette fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
   Comme $x_2>x_1$ $x_2-\mu$ et $\mu-x_1$ sont positifs et ne peuvent pas être simultanément nuls.
   Ainsi, $\frac{x_2-\mu+(\mu-x_1)\mathrm{e}^{t(x_2-x_1)}}{x_2-x_1}>0$ et donc en composant avec ln on a bien une fonction $\mathscr{C}^\infty$.
   En conclusion, g est bien $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ (*et même sur $\mathbb{R}$ en fait...*). De plus

$$\begin{aligned}
g'(t) &= x_1-\mu+\frac{(\mu-x_1)\mathrm{e}^{t(x_2-x_1)}}{\frac{x_2-\mu+(\mu-x_1)\mathrm{e}^{t(x_2-x_1)}}{x_2-x_1}}-\frac{(x_2-x_1)^2t}{4}\\
&= x_1-\mu+\frac{(\mu-x_1)(x_2-x_1)\mathrm{e}^{t(x_2-x_1)}}{x_2-\mu+(\mu-x_1)\mathrm{e}^{t(x_2-x_1)}}-\frac{(x_2-x_1)^2t}{4}\\
&= x_1-\mu+\frac{(\mu-x_1)(x_2-x_1)}{(x_2-\mu)\mathrm{e}^{-t(x_2-x_1)}+\mu-x_1}-\frac{(x_2-x_1)^2t}{4}\\
g''(t) &= \frac{(\mu-x_1)(x_2-\mu)(x_2-x_1)^2\mathrm{e}^{-t(x_2-x_1)}}{\left((x_2-\mu)\mathrm{e}^{-t(x_2-x_1)}+\mu-x_1\right)^2}-\frac{(x_2-x_1)^2}{4}
\end{aligned}$$

b) Commençons par déterminer le signe de $g''(t)$.
Pour tous réels a et b, on a $a^2+b^2\geqslant 2ab$ car $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\geqslant 0$ donc $(a+b)^2\geqslant 4ab$.
En appliquant cela pour $a=(x_2-\mu)\mathrm{e}^{-t(x_2-x_1)}$ et $b=\mu-x_1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left((x_2-\mu)\mathrm{e}^{-t(x_2-x_1)}+\mu-x_1\right)^2\geqslant 4(\mu-x_1)(x_2-\mu)\mathrm{e}^{-t(x_2-x_1)}\\
\Leftrightarrow&\frac{(\mu-x_1)(x_2-\mu)(x_2-x_1)^2\mathrm{e}^{-t(x_2-x_1)}}{\left((x_2-\mu)\mathrm{e}^{-t(x_2-x_1)}+\mu-x_1\right)^2}\leqslant\frac{(x_2-x_1)^2}{4},
\end{aligned}$$

par passage à l'inverse sur un inégalité de réels strictement positifs et multiplication par $(\mu-x_1)(x_2-\mu)(x_2-x_1)^2\mathrm{e}^{-t(x_2-x_1)}\geqslant 0$.
On obtient bien que $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $g''(t)\leqslant 0$.
On peut donc en déduire que g' est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Or, on remarque que $g'(0)=0$, donc pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $g'(t)\leqslant 0$, ce qui signifie que g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Et comme $g(0)=0$, on peut aussi en déduire que $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $g(t)\leqslant 0$.
En réécrivant cette dernière inégalité on obtient :

$$\begin{aligned}
g(t)\leqslant 0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_2-\mu+(\mu-x_1)\mathrm{e}^{t(x_2-x_1)}}{x_2-x_1}\right)\leqslant t(\mu-x_1)+\frac{(x_2-x_1)^2t^2}{8}\\
&\Leftrightarrow \frac{x_2-\mu+(\mu-x_1)\mathrm{e}^{t(x_2-x_1)}}{x_2-x_1}\leqslant \mathrm{e}^{t(\mu-x_1)}\times\exp\left(\frac{(x_2-x_1)^2t^2}{8}\right)\ \text{fonction exp croissante}\\
&\Leftrightarrow \frac{x_2-\mu}{x_2-x_1}\mathrm{e}^{tx_1}+\frac{\mu-x_1}{x_2-x_1}\mathrm{e}^{tx_2}\leqslant \mathrm{e}^{t\mu}\times\exp\left(\frac{(x_2-x_1)^2t^2}{8}\right)\ \text{multiplication par } \mathrm{e}^{tx_1}>0.
\end{aligned}$$

D'après la question 2. on a donc :

$$E(\mathrm{e}^{tX})\leqslant \mathrm{e}^{t\mu}\times\exp\left(\frac{(x_2-x_1)^2t^2}{8}\right)\Leftrightarrow E(\mathrm{e}^{t(X-\mu)})\leqslant\exp\left(\frac{(x_2-x_1)^2t^2}{8}\right),$$

par multiplication par $\mathrm{e}^{-t\mu}>0$ et linéarité de l'espérance.

c) On peut remarquer qu'on a en fait $g''(t)\leqslant 0$ pour tout réel t. Donc g' est décroissante sur $\mathbb{R}$ et ainsi g' est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, g est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc $g(t)\leqslant 0$ pour tout réel t.
L'inégalité précédente est donc bien vérifiée pour tout réel t.
Autre méthode : la VAR $-X$ est à valeurs réelles, de moyenne finie $-\mu$ et à valeurs dans $[-x_2;-x_1]$.
Le résultat de la question 3.b. appliqué à $-X$ donne

$$\forall t\in\mathbb{R}^+, E(\mathrm{e}^{t(-X+\mu)})\leqslant\exp\left(\frac{(-x_1-(-x_2))^2t^2}{8}\right)$$

On a donc $E(\mathrm{e}^{-t(X-\mu)})\leqslant\exp\left(\frac{(x_2-x_1)^2(-t)^2}{8}\right)$, ce qui prouve l'inégalité (1) pour les réels négatifs.

4. a) *Le rapport de jury indique que c'est la question la plus difficile de l'énoncé. L'astuce consistait à penser à passer à l'exponentielle dans les probabilités et à utiliser l'inégalité de Markov.*

Soit $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right| \geqslant \varepsilon\right) &= P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \geqslant \varepsilon\right) + P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \leqslant -\varepsilon\right)\\
&= P\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right) \geqslant \mathrm{e}^{nt\varepsilon}\right) + P\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}(-X_i+\mu)\right) \geqslant \mathrm{e}^{nt\varepsilon}\right)\\
&\quad \text{multiplication par } nt \geqslant 0 \text{ et passage à l'exponentielle croissante}\\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{nt\varepsilon}}\left[E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)\right) + E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}(-X_i+\mu)\right)\right)\right],
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov appliquée aux VAR $\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)$ et $\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}(-X_i+\mu)\right)$ qui sont bien à valeurs positives et admettent une espérance.

Comme les (X_i) sont mutuellement indépendantes et de même loi on a

$$E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right)\right) = E(\mathrm{e}^{t(X-\mu)})^n \qquad \text{et} \qquad E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}(-X_i+\mu)\right)\right) = E(\mathrm{e}^{-t(X-\mu)})^n.$$

D'après la question précédente, on obtient donc

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right| \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \frac{2}{\mathrm{e}^{nt\varepsilon}}\exp\left(\frac{n(x_2-x_1)^2t^2}{8}\right)\\
&\leqslant 2\exp\left(\frac{n(x_2-x_1)^2t^2}{8} - nt\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

On applique alors cette inégalité pour $t = \dfrac{4\varepsilon}{(x_2-x_1)^2}$ (*soit on « bricole » cette valeur de t soit on trouve le minimum de la fonction* $t \mapsto \dfrac{n(x_2-x_1)^2t^2}{8} - nt$) et on obtient

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(\frac{-2n\varepsilon^2}{(x_2-x_1)^2}\right).$$

b) D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \varepsilon < \mu < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + \varepsilon\right) \geqslant 1 - 2\exp\left(\frac{-2n\varepsilon^2}{(x_2-x_1)^2}\right).$$

En remarquant que $P(A \leqslant \mu \leqslant B) \geqslant P(A < \mu < B)$ et en choisissant $\varepsilon = \sqrt{-\dfrac{(x_2-x_1)^2\ln(\alpha/2)}{2n}}$, on obtient :

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \sqrt{-\frac{(x_2-x_1)^2\ln(\alpha/2)}{2n}} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + \sqrt{-\frac{(x_2-x_1)^2\ln(\alpha/2)}{2n}}\right) \geqslant 1-\alpha.$$

Partie IV :

Voici ce qui est indiqué dans le rapport du jury :

Pour comparer les parties II et III, on pouvait s'intéresser aux différences des hypothèses sur les variables aléatoires, mais aussi aux différences de résultats obtenus : bien que similaires, le résultat de la partie II, qui ne vérifie pas que la limite obtenue est positive, peut s'avérer bien plus faible que le résultat obtenu dans la partie III.

Pour comparer les résultats des parties I et III, il fallait ainsi avoir noté que l'espérance d'une variable aléatoire à densité correspond à une intégrale. Ainsi, ces deux parties donnent un moyen de calculer de manière approchée une intégrale sur un intervalle fini. La première méthode (partie I) est une méthode déterministe tandis que la deuxième méthode (partie III) est une méthode stochastique.

Cette dernière partie plus ouverte n'a été que peu de fois abordée. Cependant quelques remarques intéressantes ont parfois été données.