NOM et Prénom :

Interrogation n° 2

8 septembre 2025

Question 1 :

Définir ce qu'est le gradient en (a, b) d'une fonction f de deux variables.

Soit f une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(a, b) \in U$. On appelle **gradient de f en (a, b)**, et on note $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a, b)$, le vecteur de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right).$$

Question 2 :

Énoncer la formule des variations élémentaires au voisinage d'un point pour une fonction de deux variables.

Soit $(a, b) \in U$. Lorsque x est proche de a et y est proche de b on a :

$$f(x, y) - f(a, b) \approx (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

ou encore

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + o\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\right).$$

Question 3 :

Déterminer un équivalent simple (*c'est-à-dire de la forme* Kx^α *ou* $\dfrac{K}{x^\alpha}$ *avec* K *et* α *des constantes*) au voisinage du point indiqué des deux fonctions définies ci-dessous :

1. $\forall x \in]0; +\infty[,\ f(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^{1/x^2} - 1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{4x^3 + 2x^5 - 3}$ au voisinage de $+\infty$:

   — Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on a $\mathrm{e}^{1/x^2} - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

   — Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

   — D'après notre cours, $4x^3 + 2x^5 - 3 \underset{x \to +\infty}{\sim} 2x^5$.

   Par produit et quotient d'équivalents, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x}}{2x^5} = \dfrac{1}{2x^8}$.

2. $\forall x \in g(x) = \dfrac{\cos(x^2)\left(\mathrm{e}^x - \sqrt{1 + x}\right)}{x^4 + 2x}$ au voisinage de 0 :

   Indication : on pourra utiliser un DL pour déterminer un équivalent simple de $\mathrm{e}^x - \sqrt{1 + x}$.

   — Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0} \cos(x^2) = 1$, on a $\cos(x^2) \underset{x \to 0}{\sim} 1$.

   — Comme $\mathrm{e}^x - \sqrt{1 + x} = 1 + x + o(x) - \left(1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)\right) = \dfrac{1}{2}x + o(x)$, on a $\mathrm{e}^x - \sqrt{1 + x} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$.

   — D'après notre cours, $x^4 + 2x \underset{x \to 0}{\sim} 2x$.

   Par produit et quotient d'équivalents, $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1 \times \frac{1}{2}x}{2x} = \dfrac{1}{4}$.