

Exercices : Intégrales, rappels et généralisations

Intégrales sur un segment

EXERCICE 1 : FAIRE SES GAMMES

À l'aide du tableau des primitives usuelles (pas d'IPP, pas de changement de variable,...) calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx. \quad \left| \quad 2. \int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln(t))^3} dt. \quad \left| \quad 3. \int_{-1}^1 |6x^2 - x - 1| dx.$$

EXERCICE 2 :

On cherche à calculer $I = \int_0^{\pi/4} \sin(2x)e^x dx$.

- À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$I = e^{\pi/4} + 2 - 4I.$$

- En déduire la valeur de I .

EXERCICE 3 :

À l'aide des changements de variable indiqués, calculer les intégrales données.

- $\int_0^1 \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$, en posant $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
- $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x(1+x)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$, en posant $u = \frac{x}{x+1}$.

EXERCICE 4 :

- Déterminer 4 réels a, b, c et d tels que $a < b < c < d$ et

$$X^4 - 3X^2 + 2 = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d).$$

- Montrer que pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2} = -\frac{\sqrt{2}/4}{x-a} + \frac{1/2}{x-b} - \frac{1/2}{x-c} + \frac{\sqrt{2}/4}{x-d}.$$

- À l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$, calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^3(t) + \cos(t)}$.

EXERCICE 5 :

On cherche à calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n+k)(\ln(2n+k) - \ln(n))}$.

- Mettre la somme sous la forme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, en choisissant bien la fonction f .
- Appliquer alors le théorème de la moyenne avec la fonction f déterminée ci-dessus pour calculer la limite demandée.

EXERCICE 6 :

- À l'aide du théorème de la moyenne (ou théorème des sommes de Riemann), écrire l'intégrale $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)} dx$ comme une limite d'une suite.
- En déduire un script Python qui calcule et affiche une valeur approchée de $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)} dx$.

Intégrales généralisées

EXERCICE 7 : FAIRE SES GAMMES

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et en cas de convergence donner leur valeur :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> $\int_0^{1/3} \frac{dt}{\sqrt{1-3t}}$ $\int_0^{+\infty} \frac{3t^3}{(3+t^4)^3} dt$ $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-3x}} e^{-\sqrt{1-3x}} dx$ $\int_0^{+\infty} e^{-1} dt$ $\int_2^{+\infty} \frac{1}{4^t} dt$ $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ | <ol style="list-style-type: none"> $\int_0^{+\infty} \sin(x) dx$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$.
<i>Indication : forme canonique</i> $\int_{-\infty}^0 e^{e^t+t} dt$ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$
<i>Indication : $t = \sin^2(u)$.</i> |
|--|--|

EXERCICE 8 :

- On souhaite déterminer la nature de $\int_1^2 \frac{1}{t^2 - t} dt$.
 - Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ?
 - Justifier que $\frac{1}{t^2 - t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{t - 1}$.
 - Par la « méthode par calcul » déterminer la nature de $\int_1^2 \frac{1}{t - 1} dt$.
 - Conclure quant à la nature de $\int_1^2 \frac{1}{t^2 - t} dt$.
- En s'inspirant de la méthode de la question 1., déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \ln x}{x + 4} dx$.

EXERCICE 9 :

On considère la fonction f définie sur $]0; 1]$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 + 1}$.

- Déterminer la nature de $\int_0^1 \ln(x) dx$.
- En déduire alors la nature de $\int_0^1 f(x) dx$.

EXERCICE 10 :

À l'aide du critère des équivalents, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{x - 5}{x^4 + 4x + 4} dx \quad \left| \quad 2. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3 + 3t^2 + t}} dt \quad \left| \quad 3. \int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

EXERCICE 11 :

Dans cet exercice on souhaite déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

- Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ?
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.
- Déduire des questions précédentes la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

EXERCICE 12 :

- Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.
 - En déduire que, pour tout réel a , l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)(1 + t^a)} dt$ est convergente.
- Démontrer que pour tout réel a , l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)(1 + t^a)} dt$ est convergente.
On distinguera les cas $a \geq 0$ et $a < 0$.
- Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)(1 + t^a)} dt$ est-elle convergente ?
- Grâce au changement de variable $t = \frac{1}{x}$, montrer que

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1 + x^2)(1 + x^a)} dx.$$

- En déduire que $I(a) = \frac{\pi}{4}$. (*Indication : calculer $I(a) + I(a)$*)

EXERCICE 13 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

- Montrer que pour tout $x \geq 0$: $\int_x^{2x} f(t) dt \leq xf(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t) dt$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} f(t) dt = 0$. *Indication : $\int_x^{2x} f(t) dt = \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{2x} f(t) dt$.*
- En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.

Pour aller plus loin

EXERCICE 14 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

EXERCICE 15 :

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on considère l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1. a) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1} e^{-t}$.
b) Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.
c) En déduire la nature de l'intégrale $\Gamma(x)$.
(On distinguera le cas $x \geq 1$ et le cas $0 < x < 1$.)
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 16 :

Supposons que I est un intervalle borné et que f est une fonction continue et bornée sur I .

Montrer $\int_I f(t) dt$ est absolument convergente.

EXERCICE 17 :

Soit f une fonction continue sur $[0; +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer que si f admet une limite finie non nulle en $+\infty$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est divergente.

Correction

CORRECTION DE L'EXERCICE 1 :

1.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} dx &= \int_0^2 \frac{x}{x^2+4} dx + \frac{3}{4} \int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln(|x^2+4|)]_0^2 + \frac{3}{2} \left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln(8) - \ln(4)) + \frac{3}{2} (\arctan(1) - \arctan(0)) \\ &= \frac{\ln(2)}{2} + \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln(t))^3} dt &= \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{(\ln(t))^3} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2(\ln(t))^2} \right]_e^{e^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

3. Déterminons tout d'abord le tableau de signe de $6x^2 - x - 1$. Il s'agit d'un trinôme dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$6x^2-x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |6x^2 - x - 1| dx &= \int_{-1}^{-1/3} (6x^2 - x - 1) dx + \int_{-1/3}^{1/2} (-6x^2 + x + 1) dx \\ &\quad + \int_{1/2}^1 (6x^2 - x - 1) dx \\ &= \left[2x^3 - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^{-1/3} + \left[-2x^3 + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1/3}^{1/2} \\ &\quad + \left[2x^3 - \frac{x^2}{2} - x \right]_{1/2}^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |6x^2 - x - 1| dx &= -\frac{2}{27} - \frac{1}{18} + \frac{1}{3} - \left(-2 - \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &\quad - \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{27} + \frac{1}{18} - \frac{1}{3} \right) \\ &\quad + 2 - \frac{1}{2} - 1 - \left(\frac{2}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{341}{108}\end{aligned}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2 :

1. On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(2x) & u'(x) = 2\cos(2x) \\ v'(x) = e^x & v(x) = e^x \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Ainsi par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin(2x)e^x dx &= [\sin(2x)e^x]_0^{\pi/4} - 2 \int_0^{\pi/4} \cos(2x)e^x dx \\ &= e^{\pi/4} - 2 \int_0^{\pi/4} \cos(2x)e^x dx\end{aligned}$$

On effectue une nouvelle intégration par parties. On pose :

$$\begin{cases} u_1(x) = \cos(2x) & u'_1(x) = -2\sin(2x) \\ v_1'(x) = e^x & v_1(x) = e^x \end{cases}$$

Les fonctions u_1 et v_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Ainsi par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}I = \int_0^{\pi/4} \sin(2x)e^x dx &= e^{\pi/4} - 2 \left([\cos(2x)e^x]_0^{\pi/4} + 2 \int_0^{\pi/4} \sin(2x)e^x dx \right) \\ &= e^{\pi/4} + 2 - 4 \int_0^{\pi/4} \sin(2x)e^x dx \\ &= e^{\pi/4} + 2 - 4I\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, $5I = e^{\pi/4} + 2$, donc $I = \frac{e^{\pi/4} + 2}{5}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 3 :

1. On pose $I = \int_0^1 \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

— $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ mais il est impossible d'exprimer x en fonction de t .

— t varie entre 1 et $1 + \sqrt{2}$.

— On a $dt = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

On a donc :

$$I = \int_0^1 \underbrace{(x + \sqrt{x^2 + 1})}_t \times \underbrace{\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}}_{dt} dx = \int_1^{1+\sqrt{2}} t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{1+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

2. La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x(1+x)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

— $u = \frac{x}{x+1}$.

— $du = \frac{1}{(x+1)^2} dx$.

— u varie entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \frac{1}{x(1+x)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx &= \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{u} \ln u du \\ &= \left[\frac{(\ln u)^2}{2}\right]_{1/3}^{1/2} \\ &= \frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{2} \end{aligned}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 4 :

1. On a $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)(\alpha - 2)$. Donc

$$\begin{aligned} X^4 - 3X^2 + 2 &= (X^2 - 1)(X^2 - 2) \\ &= (X + \sqrt{2})(X + 1)(X - 1)(X - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

2. Il suffit de réduire au même dénominateur la partie de droite de l'égalité pour arriver au résultat demandé.

3. On pose :

— $x = \sin(t)$.

— $dx = \cos(t) dt$.

— x varie entre 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^3(t) + \cos(t)} &= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t) dt}{\cos^4(t) + \cos^2(t)} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{(1-x^2)^2 + 1 - x^2} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{2 - 3x^2 + x^4} dx. \end{aligned}$$

Or on vient de voir que $\frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2} = \frac{-1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} + \frac{\sqrt{2}/4}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}/4}{x+\sqrt{2}}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{2 - 3x^2 + x^4} dx &= \left[-\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{2}}{4} \ln|x-\sqrt{2}| - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln|x+\sqrt{2}| \right]_0^{\sqrt{2}/2} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2}/2 + 1}{1 - \sqrt{2}/2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(3) \\ &= \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(3) \end{aligned}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 5 :

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n+k)(\ln(2n+k) - \ln(n))} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2 + \frac{k}{n}) \ln(2 + \frac{k}{n})} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$ pour $x \in]-2; -1[\cup]-1; +\infty[$.

2. Grâce à la question précédente, on reconnaît une somme de Riemann.

Comme la fonction f est continue sur $[0; 1]$, d'après le théorème de la moyenne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n+k)(\ln(2n+k) - \ln(n))} = \int_0^1 \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)} dx$$

$$= [\ln(\ln(x+2))]_0^1 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)).$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 6 :

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ donc, d'après le théorème de la moyenne :

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{3n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{k\pi}{3n}\right)}.$$

```
2. from math import cos,pi
S=0
n=1000
for k in range(n):
    S+=1/cos(k*pi/(3*n))
print(pi/(3*n)*S)
On obtient 1,3164...
```

CORRECTION DE L'EXERCICE 7 :

1. (i) La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-3t}}$ est continue sur $[0; 1/3[$ donc le problème se pose uniquement en $\frac{1}{3}$.
- (ii) Soit $x \in [0; 1/3[$. On a

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-3t}} = \left[-\frac{2}{3} \sqrt{1-3t} \right]_0^x = -\frac{2}{3} \sqrt{1-3x} + \frac{2}{3}.$$

(iii) De plus $\lim_{x \rightarrow 1/3^-} -\frac{2}{3} \sqrt{1-3x} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

(iv) Donc l'intégrale $\int_0^{1/3} \frac{dt}{\sqrt{1-3t}}$ est convergente et $\int_0^{1/3} \frac{dt}{\sqrt{1-3t}} = \frac{2}{3}$.

2. (i) La fonction $f : t \rightarrow \frac{3t^3}{(3+t^4)^3}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

- (ii) Soit $x \in [0; +\infty[$. On a

$$\int_0^x \frac{3t^3}{(3+t^4)^3} dt = \left[-\frac{3}{8} \times \frac{1}{(3+t^4)^2} \right]_0^x = -\frac{3}{8} \times \frac{1}{(3+x^4)^2} + \frac{1}{24}.$$

(iii) De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{8} \times \frac{1}{(3+x^4)^2} + \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$.

(iv) Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{3t^3}{(3+t^4)^3} dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \frac{3t^3}{(3+t^4)^3} dt = \frac{1}{24}$.

3. (i) La fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-3x}} e^{-\sqrt{1-3x}}$ est continue sur $] -\infty; 0]$ donc le problème se pose uniquement en $-\infty$.
- (ii) Soit $A \in] -\infty; 0]$. On a

$$\int_A^0 \frac{1}{\sqrt{1-3x}} e^{-\sqrt{1-3x}} dx = \left[\frac{2}{3} e^{-\sqrt{1-3x}} \right]_A^0 = \frac{2e^{-1}}{3} - \frac{2}{3} e^{-\sqrt{1-3A}}.$$

(iii) De plus $\lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{2e^{-1}}{3} - \frac{2}{3} e^{-\sqrt{1-3A}} = \frac{2e^{-1}}{3}$.

(iv) Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-3x}} e^{-\sqrt{1-3x}} dx$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-3x}} e^{-\sqrt{1-3x}} dx = \frac{2e^{-1}}{3}.$$

4. (i) La fonction $f : t \rightarrow e^{-1}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
- (ii) Soit $x \in [0; +\infty[$. On a

$$\int_0^x e^{-1} dt = [e^{-1}t]_0^x = e^{-1}x.$$

(iii) De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1}x = +\infty$.

(iv) Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-1} dt$ est divergente.

5. (i) La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{4t}$ est continue sur $[2; +\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
- (ii) Soit $x \in [2; +\infty[$. On a

$$\int_2^x \frac{1}{4t} dt = \int_2^x e^{-t \ln 4} dt = \left[-\frac{1}{\ln 4} e^{-t \ln 4} \right]_2^x = -\frac{1}{\ln 4} e^{-x \ln 4} + \frac{1}{\ln 4} e^{-2 \ln 4}.$$

(iii) De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\ln 4} e^{-x \ln 4} + \frac{1}{\ln 4} e^{-2 \ln 4} = \frac{1}{16 \ln 4}$.

(iv) Donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{4^t} dt$ est convergente et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{4^t} dt = \frac{1}{16 \ln 4}$.

6. (i) La fonction $f : x \rightarrow x^3 e^{-x^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

(ii) Soit $A \in [0; +\infty[$. On pose, pour $x \in [0; A]$:

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 & u'(x) &= 2x \\ v'(x) &= x e^{-x^2} & v(x) &= -\frac{1}{2} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$ donc, par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^3 e^{-x^2} dx &= \left[-\frac{x^2}{2} e^{-x^2} \right]_0^A + \int_0^A x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{A^2}{2} e^{-A^2} + \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^A \\ &= -\frac{A^2}{2} e^{-A^2} - \frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(iii) De plus $\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{A^2}{2} e^{-A^2} - \frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, par croissances comparées.

(iv) Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ est convergente et $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$.

7. (i) La fonction $f : x \rightarrow \sin(x)$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

(ii) Soit $A \in [0; +\infty[$. On a $\int_0^A \sin(x) dx = -\cos(A) + 1$.

(iii) Or $\cos(A)$ n'admet pas de limite lorsque A tend vers $+\infty$.

(iv) Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x) dx$ est divergente.

8. (i) La fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$ est continue sur $] -\infty; +\infty[$ donc le problème se pose en $+\infty$ et en $-\infty$.

(ii) Soit $A \in [0; +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx &= \int_0^A \frac{1}{(x+2)^2 + 1} dx \\ &= [\arctan(x+2)]_0^A = \arctan(A+2) - \arctan(2) \end{aligned}$$

(iii) De plus $\lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan(A+2) - \arctan(2) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2)$.

(iv) Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(2).$$

(v) De même,

$$\int_B^0 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \arctan(2) - \arctan(B+2) \rightarrow \arctan(2) + \frac{\pi}{2} \text{ quand } B \rightarrow +\infty.$$

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \arctan(2) + \frac{\pi}{2}$.

(vi) En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \arctan(2) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan(2) = \pi$.

9. (i) La fonction $f : t \rightarrow e^{e^t+t}$ est continue sur $] -\infty; 0]$ donc le problème se pose uniquement en $-\infty$.

(ii) Soit $A \in] -\infty; 0]$. On a

$$\int_A^0 e^{e^t+t} dt = \int_A^0 e^t e^{e^t} dt = [e^{e^t}]_A^0 = e^1 - e^{e^A}.$$

(iii) De plus $\lim_{A \rightarrow -\infty} e - e^{e^A} = e - 1$.

(iv) Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{e^t+t} dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^0 e^{e^t+t} dt = e - 1$.

10. La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0; 1[$ donc le problème se pose en 0 et en 1.

Nous allons effectuer le changement de variable, sous réserve de convergence, pour voir comment « s'occuper » des deux problèmes.

On pose donc $t = \sin^2(u)$. La fonction $u \mapsto \sin^2(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $[0; 1]$. On peut donc utiliser le théorème de changement de variable généralisé.

Sous réserve de convergence, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(u) \underbrace{(1-\sin^2(u))}_{\text{identité fondamentale}}}} \times 2 \cos(u) \sin(u) du \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(u) \cos^2(u)}} \times 2 \cos(u) \sin(u) du \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(u) \cos(u)} \times 2 \cos(u) \sin(u) du \quad \text{car } \sin(u) \cos(u) \geq 0 \\
 &= \int_0^{\pi/2} 2 du = \pi.
 \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} 2 du$ étant évidemment convergente, on peut affirmer que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ est convergente et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \pi$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 8 :

- La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^2-t}$ est continue sur $]1; 2]$ donc l'intégrale est impropre en 1.
 - Au voisinage de 1, $\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t(t-1)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$, car $t \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1$.
 - Pour tout $1 < x < 2$, $\int_x^2 \frac{1}{t-1} dt = -\ln(x-1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^2 \frac{1}{t-1} dt = +\infty$.
Ainsi $\int_1^2 \frac{1}{t-1} dt$ est divergente.
 - D'après le critère des équivalents pour les intégrales de fonctions positives sur les fonctions positives, l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{t^2-t} dt$ est de même nature que $\int_1^2 \frac{1}{t-1} dt$ donc divergente.
- La fonction $x \rightarrow \frac{2+\ln x}{x+4}$ est continue sur $[1; +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
 - En $+\infty$, on a $\frac{2+\ln x}{x+4} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.
Or $\int_1^A \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^A = \frac{(\ln A)^2}{2}$.

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\ln x}{x} dx = +\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ est divergente et ainsi, d'après le critère des équivalents pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4} dx$ est divergente.

c) En conclusion, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4} dx$ est divergente.

CORRECTION DE L'EXERCICE 9 :

- La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0; 1]$, donc le problème se pose en 0.
 - Soit $A \in]0; 1]$. On pose :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \ln(x) & u'(x) &= \frac{1}{x} \\
 v'(x) &= 1 & v(x) &= x
 \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A; 1]$. Par intégration par parties :

$$\int_A^1 \ln(x) dx = [x \ln x]_A^1 - \int_A^1 1 dx = -A \ln(A) + A - 1.$$

Si vous connaissez une primitive de $\ln$ par cœur vous pouvez l'utiliser sans la redémontrer.

- De plus $\lim_{A \rightarrow 0^+} -A \ln(A) + A - 1 = 0$ d'après la limite usuelle du cours.
 - En conclusion l'intégrale $\int_0^1 \ln(x) dx$ est convergente et $\int_0^1 \ln(x) dx = -1$.
- La fonction f est continue sur $]0; 1]$ donc le problème se pose en 1.
 - Pour tout $x \in]0; 1]$, $\left| \frac{\ln(x)}{x^2+1} \right| \leq |\ln(x)|$.
 - Sur $]0; 1]$, $|\ln(x)| = -\ln(x)$, donc, d'après la question 1., $\int_0^1 |\ln(x)| dx$ est convergente.
D'après le critère de majoration pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 |f(x)| dx$ est convergente.

Comme la convergence absolue implique la convergence, l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est convergente.

CORRECTION DE L'EXERCICE 10 :

1. a) La fonction $x \mapsto \frac{x-5}{x^4+4x+4}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
- b) Au voisinage de $+\infty$, $\frac{x-5}{x^4+4x+4} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$.
- c) Or, pour $a > 1$, $\int_1^a \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $a \rightarrow +\infty$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ est convergente.
De plus pour $x > 0$, $\frac{1}{x^3} \geq 0$.
Ainsi, d'après le critère des équivalents pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{x-5}{x^4+4x+4} dx$ est convergente.
- d) En conclusion, $\int_0^1 \frac{x-5}{x^4+4x+4} dx$ est convergente (car $x \mapsto \frac{x-5}{x^4+4x+4}$ est continue sur $[0; 1]$) et $\int_1^{+\infty} \frac{x-5}{x^4+4x+4} dx$ est convergente. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^4+4x+4} dx$ est convergente.
2. a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}$ est continue sur $]0; 1]$ donc l'intégrale est impropre en 0.
- b) Or au voisinage de 0, $\frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$ car $t^3+3t^2+t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$.
- c) Or, pour $a \in]0; 1]$, $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2\sqrt{a} \rightarrow 2$ lorsque $a \rightarrow 0$.
Donc $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt$ est convergente. Et, pour $t \in]0; 1]$, $\frac{1}{t^{1/2}} \geq 0$.
- d) Donc, d'après le critère des équivalents pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} dt$ est convergente.
3. a) La fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $[1; +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
- b) On sait que $\ln(1+X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

- c) Or, pour $a > 1$, $\int_1^a \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{a} \rightarrow 1$ lorsque $a \rightarrow +\infty$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente.
Et, pour $x \geq 1$, $\frac{1}{x^2} \geq 0$.
- d) Donc, d'après le critère des équivalents pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ est convergente.

CORRECTION DE L'EXERCICE 11 :

1. La fonction $x \rightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $[1; +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
2. On a $x \times \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \times \frac{\ln x}{x} = \ln(x)$.
Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} = +\infty$.
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est divergente. Cf. cours
4. D'après la question 2., il existe $c > 1$ tel que, pour tout $x \geq c$, $x \times \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 1$.

On a donc, pour tout $x \geq c$, $\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{1}{x} > 0$.

Or d'après la question 3. $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est divergente, donc, d'après le critère de minoration pour les intégrales de fonctions positives, $\int_c^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ est divergente.

En conclusion, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ est divergente.

CORRECTION DE L'EXERCICE 12 :

1. a) (i) La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.
(ii) Soit $x \in [1; +\infty[$. On a $\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x}$.
(iii) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$.

(iv) Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.

b) (i) La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $[1; +\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

(ii) Pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} \leq \frac{1}{t^2}$.

(iii) On vient de montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente. Donc d'après le critère de majoration pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} dt$ est convergente.

2. Si $a \geq 0$, la fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $[0; 1]$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} dt$ n'est donc pas impropre et elle est donc convergente.

Si $a < 0$, alors la fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $]0; 1]$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) =$

0. Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} dt$ est faussement impropre en 0 et elle est donc convergente.

3. D'après les question 1. b) et 2. l'intégrale $I(a)$ est convergente pour tout réel a .

4. a) On souhaite poser $t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$. Le changement de variable est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et strictement décroissant.

On a $dt = -\frac{1}{x^2} dx$ et x varie de $+\infty$ à 0.

Ainsi :

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1+(1/x)^2)(1+(1/x)^a)} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)} dx \end{aligned}$$

b) Additionnons les deux expressions de $I(a)$:

$$\begin{aligned} I(a) + I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^a+1)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^a+1}{(x^2+1)(x^a+1)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan(x)]_0^A = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $2I(a) = \frac{\pi}{2}$ et donc $I(a) = \frac{\pi}{4}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 13 :

1. • On sait que f est décroissante. Donc pour tout $t \in [x; 2x]$, $f(t) \leq f(x)$. De plus comme $x > 0$, $x < 2x$ donc

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt \Rightarrow \int_x^{2x} f(t) dt \leq xf(x)$$

• De même, pour tout $t \in [x/2; x]$, $f(t) \geq f(x)$. Donc, comme $x/2 < x$, on a

$$\int_{x/2}^x f(t) dt \geq \int_{x/2}^x f(x) dt \Rightarrow \int_{x/2}^x f(t) dt \geq \frac{x}{2}f(x) \Rightarrow 2 \int_{x/2}^x f(t) dt \geq xf(x)$$

• En conclusion, pour tout $x \geq 0$: $\int_x^{2x} f(t) dt \leq xf(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t) dt$.

2. On a $\int_x^{2x} f(t) dt = \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{2x} f(t) dt = \int_0^{2x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$.

On sait que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{2x} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

3. On peut montrer de même que dans la question précédente que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t) dt = 0$.

Ainsi d'après l'encadrement de la question 1., on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 14 :

1. Pour $\alpha = 1$, on a déjà vu en exemple de cours que $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ est divergente.

Si $\alpha \leq 0$, on peut remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[0; 1]$ donc l'intégrale n'est pas impropre et donc elle existe bien.

Considérons donc $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

(i) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0; 1]$. Le problème se pose donc en 0.

(ii) Soit $x \in]0; 1]$. On a

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \right]_x^1 = -\frac{1}{(\alpha-1)} + \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}.$$

(iii) On remarque alors que si $\alpha > 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{(\alpha-1)} + \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} = +\infty$ et si $\alpha < 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{(\alpha-1)} + \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} = \frac{1}{1-\alpha}$.

(iv) Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.

2. Pour $\alpha = 1$, on a déjà vu en exemple de cours que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente.

On considère maintenant $\alpha \neq 1$.

(i) La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1; +\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.

(ii) Soit $x \in [1; +\infty[$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \right]_1^x = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)}.$$

(iii) On remarque alors que si $\alpha > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)} = \frac{1}{\alpha-1}$ et si $\alpha < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)} = +\infty$.

(iv) Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 15 :

1. a) D'après les croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ quelle que soit la valeur de $x > 0$.

b) (i) La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$.

(ii) Soit $x \in [1; +\infty[$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x}.$$

(iii) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$.

(iv) Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.

c) (i) Pour tout réel $x > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0; +\infty[$. L'intégrale étudiée est donc impropre en 0 et en $+\infty$.

(ii) Au voisinage de $+\infty$: d'après la question 1. a), il existe $c > 0$ tel que $\forall t \geq c$, $t^2 \times e^{-t}t^{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}$.

Or l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente d'après la question 1. b), donc d'après le critère de majoration sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_c^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt$ est convergente.

Au voisinage de 0 : pour tout $t \in]0; c]$, $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$.

Or $\int_\varepsilon^c t^{x-1} dt = \frac{1}{x}(c^x - \varepsilon^x) \rightarrow \frac{c^x}{x}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Donc $\int_0^c t^{x-1} dt$ est convergente et donc d'après le critère de majoration sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^c e^{-t}t^{x-1} dt$ est convergente.

(iii) En conclusion, l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente pour tout $x > 0$.

2. Soient $A > 0$. Nous allons effectuer une intégration par parties sur $\int_0^A e^{-t}t^x dt$.

On pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= t^x & u'(t) &= xt^{x-1} \\ v'(t) &= e^{-t} & v(t) &= -e^{-t} \end{aligned}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$. Par intégration par parties :

$$\int_0^A e^{-t}t^x dt = [t^x \times (-e^{-t})]_0^A + \int_0^A xt^{x-1}e^{-t} dt = -A^x e^{-A} + x \int_0^A e^{-t}t^{x-1} dt$$

On a $\lim_{A \rightarrow 0^+} A^x e^{-A} = 0$ donc en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus lorsque $A \rightarrow +\infty$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = x \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt \Leftrightarrow \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. On a donc $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ donc on montre facilement par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1)$.

Or $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{-A} = 1$. (Intégrale de référence dont on peut aussi donner la valeur sans justification autre que le fait que c'est une intégrale de référence...)

Donc $\Gamma(n+1) = n!$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 16 :

Comme I est un intervalle borné, il est de la forme $[a; b]$ ou $]a; b]$ ou $[a; b[$ ou encore $]a; b[$ avec a et b deux réels.

f est supposée être bornée, notons M un réel tel que, pour tout $t \in I$, $|f(t)| \leq M$.

Or $\int_a^b M \, dt$ est convergente, donc d'après les critères de convergence sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_a^b |f(t)| \, dt$ est convergente.

CORRECTION DE L'EXERCICE 17 :

Notons $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. L'énoncé nous indique que $\ell \neq 0$.

— Si $\ell > 0$: par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \text{ tel que } x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \implies -\varepsilon + \ell \leq f(x) \leq \varepsilon + \ell.$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, on a donc l'existence de A tel que :

$$\forall x \geq A, \quad f(x) \geq \frac{\ell}{2} > 0.$$

On en déduit donc que, pour tout $\alpha > A$, $\int_A^\alpha f(x) \, dx \geq \int_A^\alpha \frac{\ell}{2} \, dx = \frac{\ell}{2}(\alpha - A)$.

Et comme $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{2}(\alpha - A) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_A^\alpha f(x) \, dx = +\infty$.

En conclusion, l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(x) \, dx$ est divergente et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ est divergente.

— Si $\ell < 0$: alors $-f$ admet une limite strictement positive, donc d'après le point précédent, $\int_0^{+\infty} -f(x) \, dx$ est divergente et donc $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ est divergente.