Vocabulaire sur les séries

— **Série de terme général u_n** : c'est la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ où $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

Notation : $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

— **Somme partielle d'indice N** :

la somme partielle d'indice N de la série $\sum u_n$ est le réel $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

— **Série convergente** : $\sum u_n$ est dite convergente si, et seulement si (S_N) admet une limite finie lorsque $N \rightarrow +\infty$.

— **Série divergente** : $\sum u_n$ est dite divergente si, et seulement si (S_N) n'admet pas de limite ou tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

— **Somme d'une série** : n'existe que pour une série convergente ; la somme de la série est égale à la valeur de la limite de S_N .

Notation : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

— **Série grossièrement divergente** : se dit de la série $\sum u_n$ si, et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$.

— **Série géométrique** : ce sont les séries du type $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$.

— **Série dérivée d'une série géométrique** : ce sont les séries du type $\sum nq^{n-1}$ avec $q \in \mathbb{R}$.

— **Série dérivée seconde d'une série géométrique** : ce sont les séries du type $\sum n(n-1)q^{n-2}$ avec $q \in \mathbb{R}$.

— **Série harmonique** : il s'agit de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

— **Série exponentielle** : ce sont les séries du type $\sum \frac{x^n}{n!}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

— **Séries télescopiques** : ce sont les séries du type $\sum (v_{n+1} - v_n)$.

— **Série absolument convergente** : $\sum u_n$ est dite absolument convergente si, et seulement si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Propriétés et théorèmes importants

- Si $\sum u_n$ est convergente **alors** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ **alors** $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.
- Si $u_n \geq 0$ **alors** la suite des sommes partielles est croissante.
- Si $u_n \geq 0$: la série $\sum u_n$ est convergente **si, et seulement si**, la suite des sommes partielles est majorée.
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs :
 - * Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum v_n \text{ est convergente} \end{array} \right.$ **alors** $\sum u_n$ est convergente.
 - * Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq n_0, u_n \geq v_n \geq 0 \\ \sum v_n \text{ est divergente} \end{array} \right.$ **alors** $\sum u_n$ est divergente.
- Théorème des équivalents pour les séries à termes positifs :
Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq n_0, u_n \geq 0 \text{ et } v_n \geq 0 \\ u_n \sim v_n \end{array} \right.$ **alors** $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- Lien entre convergence absolue et convergence : Si $\sum |u_n|$ est convergente **alors** $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, **alors** $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente.

Séries de référence : convergence et somme

- La série harmonique est divergente.
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente .
- La série $\sum q^n$ est convergente **si, et seulement si**, $|q| < 1$.
Autre formulation de la propriété ci-dessus :
 - * Si $|q| < 1$ alors la série $\sum q^n$ est convergente. (Elle est même absolument convergente.)
 - * Si $|q| \geq 1$ alors la série $\sum q^n$ est grossièrement divergente.

$$\text{De plus : si } |q| < 1 \text{ alors } \sum_{n=p}^{+\infty} q^n = q^p \times \frac{1}{1-q} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

- La série $\sum nq^{n-1}$ est convergente **si, et seulement si**, $|q| < 1$.

$$\text{De plus : si } |q| < 1 \text{ alors } \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

- La série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ est convergente **si, et seulement si**, $|q| < 1$.

$$\text{De plus : si } |q| < 1 \text{ alors } \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Méthode : déterminer la nature d'une série

L'ordre des étapes ci-dessous correspond à l'ordre dans lequel vous devez réfléchir lorsqu'on vous demande d'étudier la nature d'une série sans aucune autre indication.

Dans un problème de concours, il faudra prendre en compte les questions précédentes qui vous guideront directement vers la bonne méthode à choisir sans avoir à toutes les tester!!!!

— **Étape 1** : calculer, si possible, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

→ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ou si on n'arrive pas à calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, on passe à l'étape 2.

→ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, on CONCLUT : la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

— **Étape 2** : exprimer $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ sans le signe $\sum$ ou à l'aide de sommes partielles de séries de référence.

→ si on n'arrive pas à exprimer S_N sans le signe $\sum$ ou à l'aide de sommes partielles de séries de référence, on passe à l'étape 3.

→ si S_N est exprimée sans le signe $\sum$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \ell \in \mathbb{R}$ (limite finie), on CONCLUT :

La série $\sum u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$ (on met la valeur trouvée pour ℓ lorsqu'on est en exercice!!).

→ si S_N est exprimée sans le signe $\sum$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \pm\infty$ ou si S_N n'admet pas de limite, on CONCLUT :

La série $\sum u_n$ est divergente.

→ si S_N est exprimée à l'aide de sommes partielles de séries de référence, on donne la nature de la série correspondant à chaque somme partielle puis on CONCLUT : La série $\sum u_n$ est

En cas de convergence, on calcule la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en se servant des valeurs des sommes de nos séries de référence.

— **Étape 3** : choisir une des trois méthodes ci-dessous. Pour faire votre choix il faut vous aider des questions précédentes dans votre exercice ou alors de la forme de u_n . Si vous n'avez aucune idée de la méthode qui va fonctionner alors vous testez les trois méthodes indiquées ici !

→ Minoration par le terme général d'une série divergente :

on trouve v_n tel que $\forall n \geq n_0, u_n \geq v_n \geq 0$, puis on CONCLUT :

On sait que la série $\sum v_n$ est divergente car D'après les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est divergente.

→ Majoration par le terme général d'une série convergente :

on trouve v_n tel que $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$, puis on CONCLUT :

On sait que la série $\sum v_n$ est convergente car D'après les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

→ Utilisation d'un équivalent simple :

on trouve v_n tel que $\forall n \geq n_0, v_n \geq 0$ et $u_n \sim v_n$, puis on CONCLUT :

On sait que la série $\sum v_n$ est (à remplir par convergente ou divergente) car
D'après le théorème des équivalents pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est (on met le même terme que pour $\sum v_n$).

— **Que faire si les étapes 1 et 2 ont échouées mais on n'a pas $u_n \geq 0$?**

Vous avez pu remarquer que dans l'étape 3, les méthodes présentées nécessitent le fait que $u_n \geq 0$. Si malheureusement dans votre exercice cette hypothèse n'est pas satisfaite alors deux possibilités :

- * si votre u_n vérifie $u_n \leq 0$ alors vous pouvez appliquer l'étape 3 à la série $\sum (-u_n)$. En conclusion il faudra rajouter la petite phrase :
« En multipliant le terme général par -1 , on obtient que la série $\sum u_n$ est(même mot que pour la nature de $\sum (-u_n)$) »
- * si votre u_n change de signe suivant la valeur de n alors vous pouvez tenter d'appliquer le théorème de majoration ou des équivalents pour montrer que la série $\sum |u_n|$ est convergente. En conclusion il faudra rajouter la petite phrase :
« Une série absolument convergente est convergente, donc la série $\sum u_n$ est convergente. »

— **Que faire si la série $\sum |u_n|$ est divergente et que je cherche la nature de $\sum u_n$?**

Il faut revérifier que les étapes 1 et 2 ne fonctionnent pas et si vraiment ces étapes ne fonctionnent pas cela signifie que l'énoncé doit vous guider pour trouver la nature de $\sum u_n$.

— **Comment trouver un majorant ou minorant simple de u_n ?**

Tout d'abord il faut commencer par tenter de trouver un majorant ou un minorant avec les méthodes simples d'opérations sur les inégalités (on part de $n \geq \dots$ puis on ajoute, multiplie, applique une fonction usuelle....).

Si ces opérations simples ne fonctionnent pas, l'énoncé est censé vous guider.

En exercice nous avons rencontré, par exemple, une méthode utilisant un calcul de limite :

- * Pour minorer u_n : on trouve une suite positive (v_n) (votre exercice doit vous guider) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n u_n = +\infty$. On rédige ensuite :

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n u_n \geq 1$, et donc $u_n \geq \frac{1}{v_n} \geq 0$.

Il faut alors s'être débrouillé pour que la série $\sum \frac{1}{v_n}$ soit divergente....

- * Pour majorer u_n : on trouve une suite positive (v_n) (votre exercice doit vous guider) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n u_n = 0$. On rédige ensuite :

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq v_n u_n \leq 1$, et donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{v_n}$.

Il faut alors s'être débrouillé pour que la série $\sum \frac{1}{v_n}$ soit convergente....