Variables aléatoires réelles discrètes

Table des matières

Dans tout le chapitre $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ désigne un espace probabilisé. Cet espace peut, s'il n'y a pas plus de précision, être fini ou infini.

I Loi, fonction de répartition

Définition 1

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.

— On dit que X est une **variable aléatoire réelle finie** lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

— On dit que X est une **variable aléatoire réelle discrète** lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire sous la forme :

$$X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\} \quad \text{ou } X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geqslant n_0\}.$$

Remarque :

Certaines personnes considèrent que les variables finies sont aussi des variables discrètes.

Exemple 1 :

Un joueur lance deux fois de suite un dé cubique équilibré et note les deux nombres obtenus sous la forme d'un couple : par exemple si le joueur obtient 2 puis 5, on note son résultat sous la forme $(2, 5)$. L'univers de notre expérience est $\Omega = [\![1; 6]\!] \times [\![1; 6]\!]$.

On définit la variable aléatoire réelle X qui, à chaque couple, associe la somme des deux nombres obtenus. Ici, on a $X(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$. Donc X est une variable aléatoire réelle finie.

Dans cet exemple, on a

$$[X = 2] = \{(1, 1)\}, \qquad [X = 4] = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\},$$

$$[X \leqslant 5] = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Dans de nombreux exercices, on utilisera plutôt des notations du type A_k : « obtenir k au premier lancers » et B_k : « obtenir k au deuxième lancer », et on écrira alors les événements précédents sous la forme :

$$[X = 2] = A_1 \cap B_1, \qquad [X = 4] = (A_1 \cap B_3) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_1),$$

$$[X \leqslant 5] = \bigcup_{(i,j) \in X(\Omega)^2, i+j \leqslant 5} (A_i \cap B_j) = \bigcup_{i=1}^{4} \bigcup_{j=1}^{5-i} (A_i \cap B_j).$$

Exemple 2 :

On effectue une succession de lancers indépendants d'un dé cubique équilibré jusqu'à obtenir pour la première fois un 6.

On considère la VAR X qui renvoie le numéro du lancer pour lequel on obtient 6 pour la première fois.

L'univers de notre expérience est l'ensemble de toutes les issues possibles de cette succession de lancers, ce qui n'est pas très agréable à décrire. *La plupart des exercices ne demanderont pas d'expliciter l'univers de l'expérience.*

On a ici $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc X est une variable aléatoire réelle discrète.

Dans cet exemple, si on note S_k désigne l'événement « obtenir 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer », on peut écrire

$$[X = 4] = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap S_4,$$

$$[X \leqslant 3] = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (S_1) \cup \left(\overline{S_1} \cap S_2\right) \cup \left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3\right),$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [X \leqslant n] = \bigcup_{k=1}^{n} S_k = S_1 \cup (\overline{S_1} \cap S_2) \cup \ldots \cup \left(\overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n\right),$$

$$[X \geqslant 5] = \bigcup_{k=5}^{+\infty} S_k = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [X \geqslant n] = \bigcup_{k=n}^{+\infty} S_k = \begin{cases} \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{S_i} & \text{si } n \geqslant 2 \\ \Omega & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

Définition 2

On appelle **loi de probabilité** de la variable aléatoire réelle discrète ou finie X la fonction f_X définie par :

$$f_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(X = x). \end{array}$$

Conseils méthodologiques :

Lorsque vous devez répondre à la question « déterminer la loi de X », il faut commencer par donner clairement $X(\Omega)$. Puis pour chaque élément x de cet ensemble $X(\Omega)$, il faut donner $P(X = x)$.
Lorsque $X(\Omega)$ est fini et ne contient « pas trop » d'éléments, on peut présenter les résultats sous forme de tableau avec dans la première ligne les valeurs de x et dans la deuxième ligne $P(X = x)$.

Exemple 3 :

On reprend l'exemple 2 : on lance un dé cubique équilibré jusqu'à obtenir le premier 6 et X désigne le numéro du lancer pour lequel on obtient 6 pour la première fois. On souhaite donner la loi de X.

Nous avons vu que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Il faut maintenant calculer $P(X = n)$ pour chaque élément $n \in X(\Omega)$.

Il est impossible de donner une par une ces probabilités car il y en a une infinité à calculer.

On va donc donner une formule pour calculer $P(X = n)$ pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

On commence pour cela par expliciter l'événement $[X = n]$. Afin de faciliter les explications, on reprend la notation S_k : « obtenir 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

On peut alors écrire $[X = n] = \overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n$ et d'après la formule des probabilités composées, on a :

$$P(X = n) = P\left(\overline{S_1}\right) \times P_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) \times \ldots \times P_{\overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-2}}}\left(\overline{S_{n-1}}\right) \times P_{\overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-1}}}(S_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.$$

En conclusion, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$.

Propriété 1

Soit X une VAR discrète ou finie.
La famille d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Conseils méthodologiques :

- Cette propriété permet de vérifier la cohérence de vos résultats lorsque vous donnez la loi de X : on doit toujours avoir $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.
- Comme $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilité totale pour n'importe quel événement A :

$$P(A) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) P_{[X=x]}(A) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap A).$$

Exemple 4 :

Reprenons l'exemple précédent et vérifions la cohérence de notre résultat.

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$. Notre loi est bien cohérente.

Exemple 5 :

On reprend de nouveau notre expérience de lancer de dé. On dispose aussi d'une infinité d'urnes appelées U_1, U_2, U_3, ...telles que l'urne U_i contient 1 jeton blanc et $2^i - 1$ jetons rouges.

Après avoir effectué nos lancers de dés on choisit au hasard un jeton dans l'urne correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir notre premier six : par exemple, si le premier six est apparu au cinquième lancer on choisit au hasard un jeton dans l'urne U_5.

Quelle est la probabilité de l'événement B « obtenir un jeton blanc » ?

La famille $([X = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P_{[X=n]}(B) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{5} \times \frac{5}{12} \times \frac{1}{1-\frac{5}{12}} \\
&= \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

> **Théorème 1 : Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire réelle discrète**
> Soit $\{(x_n, p_n)/n \in \mathbb{N}\}$ une partie de $\mathbb{R}^2$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 0$ et si $\sum p_n$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une VAR discrète X telle que $X(\Omega) = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = x_n) = p_n$.

> ***Conseils méthodologiques :***
> Ce théorème permet, lorsqu'on vous donne des valeurs pour p_n et x_n, de déterminer si ces valeurs correspondent à la loi d'une variable aléatoire réelle discrète.

Exemple 6 :

Pour une variable aléatoire réelle X telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z} \setminus \{0; -1\}$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0; -1\}, \qquad P(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}$$

Vérifions que ceci définit bien une loi de probabilité pour X.

— Pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0; -1\}$, n et $n + 1$ sont de même signe donc on a bien $P(X = n) \geqslant 0$.

— Il faut maintenant montrer que $\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} P(X = n)$ est convergente et vaut 1.

On va calculer séparément $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = -n)$.

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(N+1)}$, par télescopage.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P(X = n)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \frac{1}{2}$.

De même $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2(-n)(-n+1)} = \sum_{n=2}^{N}\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}$, par télescopage.

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} P(X = -n)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = -n) = \frac{1}{2}$.

En conclusion $\sum_{n\in X(\Omega)} P(X=n)$ est convergente et vaut 1.

On a bien une loi de probabilité pour X.

2 Fonction de répartition d'une VAR discrète ou finie

Propriété 2

La fonction de répartition d'une VAR discrète ou finie est une fonction en escalier.

Voyons cela sur un exemple :

Exemple 7 :

On considère toujours notre exemple de lancers successifs d'un dé cubique équilibré et X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir 6 pour la première fois.

Calculons plusieurs valeurs prises par F_X : $F_X(-2)$, $F_X(2,1)$, $F_X(2,99)$.

— Par définition, $F_X(-2) = P(X \leqslant -2) = 0$ car l'événement $[X \leqslant -2]$ est impossible.
On peut même étendre cette remarque en écrivant que $F_X(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha < 1$ car lorsque $\alpha < 1$, l'événement $[X \leqslant \alpha]$ est impossible.

— De plus, $F_X(2,1) = P(X \leqslant 2,1) = P([X=1] \cup [X=2])$ car X prend des valeurs entières.
Comme les événements $[X=1]$ et $[X=2]$ sont incompatibles, $F_X(2,1) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.
Et on remarque alors que l'on a aussi $F_X(2,99) = P([X=1] \cup [X=2]) = \frac{11}{36}$.
On peut, en fait, étendre ce résultat en écrivant que, pour $\beta \in [2;3[$,
$F_X(\beta) = P([X=1] \cup [X=2]) = \frac{11}{36}$.

— Et on peut encore étendre cela en écrivant que, pour tout $\gamma \in [k;k+1[$ ($k \in \mathbb{N}^*$),
$F_X(\gamma) = P([X=1] \cup \ldots \cup [X=k])$.

En résumé, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(X=i) & \text{si } k \leqslant x < k+1 \end{cases}$.

On voit bien sur cet exemple que la fonction F_X est une fonction en escalier.

Théorème 2 : Loi d'une VAR discrète ou finie à partir de sa fonction de répartition

On suppose que X est une VAR discrète ou finie telle que $X(\Omega) = \{x_n/n \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ et on suppose que les x_n sont rangés par ordre croissant. Alors pour tout $n \in I$ tel que $n-1 \in I$ (on a donc $x_{n-1} < x_n$) on a :

$$P(X = x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1}).$$

Démonstration :

Il faut remarquer que $[X \leqslant x_n] = [X = x_n] \cup [X \leqslant x_{n-1}]$ car entre x_{n-1} et x_n il n'y a pas de valeurs prises par X.

De plus les événements $[X = x_n]$ et $[X \leqslant x_{n-1}]$ sont incompatibles donc :

$$P(X \leqslant x_n) = P(X = x_n) + P(X \leqslant x_{n-1}) \iff P(X = x_n) = F(x_n) - F(x_{n-1}).$$

□

Conseils méthodologiques :

L'utilisation la plus classique de ce théorème est la détermination de la loi du maximum ou du minimum de n variables aléatoires indépendantes.

Exemple 8 : Un classique !

On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On effectue N (N est un entier non nul fixé) tirages avec remise et, pour $k \in [\![1; N]\!]$ on note X_k le numéro du jeton obtenu au k-ième tirage.

On cherche la loi de la variable aléatoire $T = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N)$.

On remarque tout d'abord que $T(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

Il nous faut maintenant calculer $P(T = k)$ pour $k \in [\![1; n]\!]$.

Une **méthode classique** consiste à commencer par calculer $P(T \leqslant k)$ pour ensuite en déduire la loi.

Les tirages étant effectués avec remise, les variables $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ sont indépendantes.

De plus, pour $k \in [\![1; n]\!]$,

$$\begin{aligned} P(T \leqslant k) &= P\left([X_1 \leqslant k] \cap [X_2 \leqslant k] \cap \ldots \cap [X_N \leqslant k]\right) && \text{c'est de la logique !} \\ &= P(X_1 \leqslant k) \times P(X_2 \leqslant k) \times \ldots \times P(X_N \leqslant k) && \text{VAR indépendantes} \\ &= \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} \times \ldots \times \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^N. \end{aligned}$$

On obtient alors la loi de T en écrivant :

Pour $k \in [\![1; n]\!]$, $[T \leqslant k] = [T = k] \cup [T \leqslant k-1]$, car T est à valeurs entières. Comme il s'agit d'une union d'événements disjoints, on en déduit que

$$P(T \leqslant k) = P(T = k) + P(T \leqslant k-1) \Leftrightarrow P(T = k) = P(T \leqslant k) - P(T \leqslant k-1).$$

- Donc, pour $k \in [\![2; n]\!]$, $P(T = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N$.
- Et $P(T = 1) = P(T \leqslant 1) = \frac{1}{n^N}$ (la formule précédente est donc encore valable pour $k = 1$).

En conclusion $T(\Omega) = [\![1; n]\!]$ et, pour $k \in [\![1; n]\!]$, $P(T = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N$.

II Moments d'une variables aléatoire discrète ou finie

1 Espérance

La définition de l'espérance d'une VAR finie a été vue en sup et rappelée dans le chapitre « Concepts de base sur les variables aléatoires ».

Définition 3 : Espérance d'une VAR discrète

Soit X une VAR discrète.

On dit que ***X* admet une espérance**, ou que **l'espérance de *X* existe**, si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente.

On appelle alors **espérance de *X***, le réel $E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Remarques :

- $E(X)$ est une moyenne pondérée des valeurs prises par X.
- Lorsque X est une VAR finie, X admet forcément une espérance.
- On impose la convergence absolue de la série $\sum xP(X = x)$ afin que la valeur de l'espérance ne dépende pas du choix de l'indexation des éléments de $X(\Omega)$.

  On pourra toutefois noter que dans la grande majorité des exercices, X est une VAR à valeurs positives donc la convergence absolue et la convergence sont équivalentes.

Exemple 9 :

Reprenons une nouvelle fois l'exemple 2 de notre cours : X désigne le nombre de lancers d'un dé cubique afin d'obtenir pour la première fois 6.

La loi de X est : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

On sait que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nP(X = n)$ est absolument convergente. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nP(X = n) \geqslant 0$ donc étudier la convergence ou la convergence absolue revient au même. (***Phrase de rédaction type pour le calcul de l'espérance d'une VAR discrète***)

Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}_{\text{somme de série de ref cvgte car } |5/6|<1} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 6.
\end{aligned}$$

Donc X admet une espérance et $E(X) = 6$.

Ce résultat signifie qu'en moyenne, on obtient un 6 pour la première fois au sixième lancer *(on peut remarquer que ce résultat serait le même pour obtenir* 1, 2,...*)*.

Propriété 3

Soit X une VAR discrète ou finie telle que $X(\Omega) \subset [a; b]$ avec a et b deux réels fixés.
Alors X admet une espérance et $a \leqslant E(X) \leqslant b$.

Conseils méthodologiques :

— Cette propriété permet de vérifier la cohérence de votre résultat.
— En particulier si X ne prend que des valeurs positives, alors $E(X) \geqslant 0$.

Démonstration :

Comme on suppose que $X(\Omega) \subset [a; b]$, on a donc, pour tout $x \in X(\Omega)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

— On pose alors $M = \max(|a|, |b|)$. Cela nous permet d'écrire que, pour tout $x \in X(\Omega)$, $|x| \leqslant M$ et donc $|xP(X = x)| \leqslant MP(X = x)$, car $P(X = x) \geqslant 0$.
Or, on sait que $\sum P(X = x)$ est une série convergente, donc d'après le critère de majoration pour les séries à termes positifs, $\sum |xP(X = x)|$ est une série convergente, ce qui signifie que X admet une espérance.
— On peut maintenant écrire :

$$\begin{aligned}
a \leqslant x \leqslant b &\Rightarrow aP(X = x) \leqslant xP(X = x) \leqslant bP(X = x) && \text{car } P(X = x) \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \sum_{x\in X(\Omega)} aP(X = x) \leqslant \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) \leqslant \sum_{x\in X(\Omega)} bP(X = x) && \text{somme d'inégalités} \\
&\Rightarrow a \leqslant E(X) \leqslant b && \text{car } \sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x) = 1.
\end{aligned}$$

□

Le théorème suivant est extrêmement important :

Théorème 3 : Théorème de transfert
Soit X une VAR discrète et soit g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors la variable aléatoire réelle $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$ est absolument convergente et dans ce cas, on a :

$$E(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x).$$

Remarque :
Il existe une version du théorème de transfert pour les VAR finie dans votre cours de sup. La principale différence vient du fait qu'il n'y a pas besoin de parler de convergence de série !

Exemple 10 :
Poursuivons l'exemple précédent et déterminons $E(X^2)$.
On sait que X^2 admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2P(X=n)$ est absolument convergente et dans ce cas $E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2P(X=n)$.
Or on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^2\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{5}{36}\times n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \frac{1}{6}\times n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

On reconnait ici le terme général des séries dérivées première et seconde de la série géométrique de raison $\frac{5}{6}$.
Comme $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$, les séries $\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ sont absolument convergentes.
Ainsi, X^2 admet une espérance, et on a :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{5}{36}\times\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \frac{1}{6}\times\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{5}{36}\times\frac{2}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^3} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 60+6 = 66 \end{aligned}$$

En conclusion, X admet un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = 66$.

2 *Variance et écart type*

Tous les résultats utiles sur la variance sont présents dans le chapitre « Concepts de base des variables aléatoires »

Exemple 11 :
On considère la VAR X dont la loi est donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(X=n) = \frac{1}{\lambda n^3}$ avec $\lambda = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$.
On a $nP(X=n) = \frac{1}{\lambda n^2}$ donc $\sum |nP(X=n)|$ est convergente et $E(X)$ existe.
De plus $n^2P(X=n) = \frac{1}{\lambda n}$ donc $\sum |n^2P(X=n)|$ est divergente et $E(X^2)$ n'existe pas.
X n'admet donc pas de variance.

Exemple 12 :

Reprenons encore notre lancer de dé jusqu'à obtenir 6 pour la première fois. Nous avons vu dans la partie précédente que X^2 admet une espérance. Donc, d'après la formule de Kœnig-Huygens, $V(X)$ existe et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 66 - 36 = 30.$$

III Lois usuelles

1 *Lois usuelles finies (Rappels de sup)*

a Loi uniforme

Définition 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la **loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$** si, et seulement si :

$$X(\Omega) = [\![1;n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1;n]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{n}.$$

Remarque :

Lorsque X suit une loi uniforme, tous les événements $[X=k]$ sont équiprobables. On peut ainsi étendre cette notion de loi uniforme sur n'importe quel ensemble fini.

Propriété 4

Soit X une VAR qui suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. Alors : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

Remarque :

La valeur de la variance est hors-programme.

b Loi de Bernoulli (ou indicatrice d'événement)

Définition 5

On considère une expérience aléatoire e et A un événement lié à cette expérience. On définit alors la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ égale à 1 si A est réalisé et 0 sinon.
La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ s'appelle **l'indicatrice de A**.

Remarque :

On a donc $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$ et $P(\mathbb{1}_A = 0) = 1 - P(A)$.

Définition 6

Soit $p \in [0;1]$. On dit qu'une VAR X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** si, et seulement si :

$$X(\Omega) = \{0;1\}, \qquad P(X=0) = 1-p \qquad \text{et} \qquad P(X=1) = p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Remarque :

Si A est un événement, alors la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
Réciproquement, si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $X = \mathbb{1}_{[X=1]}$.

Propriété 5

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

c Loi binomiale (ou des tirages avec remise)

Mise en place :

On considère une expérience e et on considère un événement A lié à e tel que $P(A) = p$. On suppose que l'on effectue n fois l'expérience e dans les mêmes conditions (les expériences sont indépendantes) et on considère X le nombre de fois où A est réalisé au cours de ces n expériences identiques.

X prend donc les valeurs $0, 1, ..., n$.

Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On cherche à calculer $P(X = k)$ c'est-à-dire la probabilité que A soit réalisé k fois exactement. Parmi les n expériences, il y a $\binom{n}{k}$ façon de placer les k fois où A est réalisé. Chacun de ces $\binom{n}{k}$ événement est réalisé avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$.

On a donc : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

Définition 7

Soit $p \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que la VAR X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** si, et seulement si :

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} = [\![0; n]\!]$$

$$\forall k \in [\![0; n]\!] \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Un VAR qui suit une loi binomiale est une VAR qui « compte le nombre de réalisation d'un événement A de probabilité p au cours de n expériences identiques. »

Exemple 13 :

On procède à n lancers d'un dé équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient un numéro inférieur à 2. Quelle est la loi de X ?

On note A l'événement « obtenir un nombre inférieur à 2 ». On a ici $P(A) = \frac{1}{3}$.

X compte le nombre de réalisation de l'événement A au cours de n expériences identiques. X suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{3}$. On a donc :

$$X(\Omega) = [\![0; n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0; n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

Conseils méthodologiques :

Pour justifier qu'une variable aléatoire donnée suit une binomiale, plusieurs « mots-clés » sont nécessaires :

— une succession de n expériences (n étant fixé par l'énoncé) ;

— les expériences doivent être identiques ;

— X doit désigner le nombre de fois où un événement A de probabilité p est réalisé.

Si ces trois points sont vérifiés, vous pouvez affirmer sans calcul que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété 6

Soit X une VAR qui suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$. Alors on a :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

a Loi géométrique (ou loi d'attente d'un premier succès dans un processus sans mémoire)

Mise en place :

On considère une expérience aléatoire e et un événement A lié à e tel que $P(A) = p$. On répète l'expérience e de façon illimitée et dans des conditions identiques et on appelle X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que A soit réalisé pour la première fois.

On note A_i l'événement « A est réalisé a cours de la i^{eme} expérience ».

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et de plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = k) = P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) = P\left(\overline{A_1}\right) \times P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \times \ldots \times P_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-2}}}\left(\overline{A_{n-1}}\right) \times P_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}}(A_n) = (1-p)^{k-}$$

Définition 8

Soit $p \in]0;1[$. On dit qu'une VAR X suit **la loi géométrique de paramètre p** si, et seulement si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Exemple 14 :

L'exemple que nous suivons depuis le début de ce chapitre est un exemple de loi géométrique.

En effet, X désignait le rang d'apparition pour la première fois de l'événement « obtenir un 6 »(qui est de probabilité $\dfrac{1}{6}$) au cours d'une succession illimitée d'expériences identiques.

Sans aucun calcul vous pouvez maintenant affirmer que X suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

Exemple 15 :

Une urne contient 3 jetons blancs et 2 noirs. On effectue dans cette urne des tirages successifs avec remise de chaque jeton après tirage et on note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois un jeton blanc. Quelle est la loi de X ?

On note B l'événement « obtenir un jeton blanc ». On a ici $P(B) = \dfrac{3}{5}$.

X correspond au rang de la première fois où l'événement B est réalisé au cours d'une succession illimité d'expériences identiques. X suit donc la loi géométrique de paramètre $\dfrac{3}{5}$ et on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \times \frac{3}{5}$$

Conseils méthodologiques :

Pour justifier qu'une variable aléatoire donnée suit une loi géométrique, plusieurs « mots-clés » sont nécessaires :

— une succession **illimitée** d'expériences ;
— les expériences doivent être identiques ;
— X doit désigner le rang d'apparition pour la première fois d'un événement A de probabilité p.

Si ces trois points sont vérifiés, vous pouvez affirmer sans calcul que X suit la loi géométrique de paramètre p.

Propriété 7
Soit X une VAR qui suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, $p \in]0;1[$. Alors X admet une espérance et une variance, et :
$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration :

— On sait que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nP(X=n)$ est absolument convergente. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nP(X=n) \geqslant 0$ donc étudier la convergence ou la convergence absolue revient au même.
Sous réserve de convergence :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}p \\ &= p \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}}_{\text{somme de série de ref cvgte car } |1-p|<1} \\ &= p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$
Donc X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{p}$.

— On sait que X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance, c'est-à-dire si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2P(X=n)$ est absolument convergente.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2P(X=n) \geqslant 0$ donc étudier la convergence ou la convergence absolue revient au même.
Sous réserve de convergence :
$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1+1)(1-p)^{n-1}p = p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} + p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}.$$
On reconnait ici les séries dérivées première et seconde de la série géométrique de raison $1-p$. Comme $|1-p| < 1$, ces séries sont convergentes. X^2 admet bien une espérance et
$$E(X^2) = p(1-p) \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} + p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$
D'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet donc une variance et
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$
□

Propriété 8 : Variable sans mémoire
Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p.
$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2,\ P(X > k+\ell) = P(X>k)P(X>\ell) \text{ et } P_{[X>k]}(X > k+\ell) = P(X>\ell).$$

Remarque :
Cette propriété s'interprète en disant que X est une **variable sans mémoire**. Si par exemple X désigne une durée de vie, alors cette propriété nous dit que X ne tient pas compte du passé...

Démonstration :

— Commençons par donner une formule explicite de $P(X > n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(X > n) = P(X \geqslant n+1) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \\ &= p \times (1-p)^n \times \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^n. \end{aligned}$$

Si on interprète X comme le rang d'apparition pour la première fois d'un événement de probabilité p au cours d'une succession illimitée d'expériences identiques, on peut dire que l'événement $[X > n]$ signifie que l'on a eu n échecs au cours des n premières expériences et on obtient donc directement le fait que $P(X > n) = (1-p)^n$.

— L'égalité $P(X > k+\ell) = P(X > k)P(X > \ell)$ découle directement des règles de calculs sur les puissances et du point précédent.
De plus $P_{[X>k]}(X > k+l) = \dfrac{P([X > k] \cap [X > k+\ell])}{P(X > k)} = \dfrac{P(X > k+\ell)}{P(X > k)} = P(X > \ell)$.

□

b Loi de Poisson

Définition 9
Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une VAR X suit une **loi de Poisson de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$** si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

On ne dispose pas ici d'une situation concrète simple pour illustrer la loi de Poisson. Une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson sera toujours introduite sous la forme « soit X une VAR qui suit une loi de Poisson. »

Propriété 9
Soit X une VAR qui suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance, et on a :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Démonstration :

— On sait que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} nP(X = n)$ est absolument convergente. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nP(X = n) \geqslant 0$ donc étudier la convergence ou la convergence absolue revient au même.
Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \underset{k=n-1}{=} \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On reconnait la série exponentielle donc la série est convergente quelle que soit la valeur de λ. Ainsi $E(X)$ existe et $E(X) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda$.

— On sait que X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance, c'est-à-dire si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 P(X=n)$ est absolument convergente.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 P(X=n) \geqslant 0$ donc étudier la convergence ou la convergence absolue revient au même.

Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X=n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \right) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \right) \underset{\substack{i=n-2 \\ k=n-1}}{=} \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right). \end{aligned}$$

On reconnait encore une fois la série exponentielle donc la série est convergente. Ainsi $E(X^2)$ existe et $E(X^2) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda} + \lambda \mathrm{e}^{\lambda} \right) = \lambda^2 + \lambda$.

D'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet donc une variance et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

$\square$