Banque Agro-véto 2019 Modélisation

Correction

Partie 1

1. a) On cherche ici à déterminer une fonction polynomiale de degré 2 qui soit le plus proche possible de notre nuage de point.

   On cherche à ce que la distance entre le point minimiser la somme de toutes les distances entre les points (t_i, y_i) et le point d'abscisse t_i de la fonction $t \mapsto a + bt + ct^2$.

   b) La fonction F est polynomiale en a, b et c donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport à ces trois variables et donc les trois dérivées partielles existent. De plus :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a}(a,b,c) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} -2(y_i - a - bt_i - ct_i^2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} -2t_i(y_i - a - bt_i - ct_i^2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}(a,b,c) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} -2t_i^2(y_i - a - bt_i - ct_i^2) \end{cases}.$$

2. a) On a $T\beta = \begin{pmatrix} a + bt_1 + ct_1^2 \\ \vdots \\ a + bt_n + ct_n^2 \end{pmatrix}$. Donc $Y - T\beta = \begin{pmatrix} y_1 - a - bt_1 - ct_1^2 \\ \vdots \\ y_n - a - bt_n - ct_n^2 \end{pmatrix}$.

   On en déduit que $\left\langle Y - T\beta \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bt_i - ct_i^2)$.

   On retrouve donc bien que $\dfrac{\partial F}{\partial a}(a,b,c) = -2\left\langle Y - T\beta \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

   b) Comme $\left\langle Y - T\beta \middle| \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \right\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i(y_i - a - bt_i - ct_i^2)$, on a bien $\dfrac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = -2\left\langle Y - T\beta \middle| \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \right\rangle$.

3. Supposons $\hat{\beta}$ est solution du système donné. On a alors :

$$\begin{cases} \left\langle Y - T\hat{\beta} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle Y - T\hat{\beta} \middle| \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle Y - T\hat{\beta} \middle| \begin{pmatrix} t_1^2 \\ \vdots \\ t_n^2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^t(Y - T\hat{\beta}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ {}^t(Y - T\hat{\beta}) \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = 0 \\ {}^t(Y - T\hat{\beta}) \begin{pmatrix} t_1^2 \\ \vdots \\ t_n^2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow {}^t(Y - T\hat{\beta}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 \end{pmatrix}}_{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}^t(Y - T\hat{\beta})T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow {}^tT(Y - T\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow {}^tTY = {}^tTT\hat{\beta}$$

4. *Encore un sujet qui fait la confusion $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...*

   a) Raisonnons par double inclusion :

   — Soit $u \in \ker(A)$. On a alors $Au = 0$ donc ${}^tAAU = {}^tA0 = 0$ et donc $u \in \ker({}^tAA)$.
   On a montré que $\ker(A) \subset \ker({}^tAA)$.

— Soit maintenant $u \in \ker({}^tAA)$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
{}^tAAu = 0 &\Longrightarrow {}^tu\,{}^tAAu = 0 \Longrightarrow {}^tAuAu = 0 \\
&\Longrightarrow \langle Au|\ Au\rangle = 0 \Longrightarrow ||Au||^2 = 0 \Longrightarrow Au = 0,
\end{aligned}
$$

car le seul vecteur qui a une norme nulle est le vecteur nul. On a donc $u \in \ker(A)$.
Ainsi $\ker({}^tAA) \subset \ker(A)$.

En conclusion $\ker(A) = \ker({}^tAA)$.

b) La matrice ${}^tAA$ est une matrice carrée à p lignes et p colonnes. Cette matrice est canoniquement associée à un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$. Donc, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\ker({}^tAA) + \mathrm{rg}({}^tAA) = p.$$

c) A est une matrice à n lignes et p colonnes. Cette matrice est canoniquement associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Donc, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\ker(A)) + \mathrm{rg}(A) = p.$$

d) D'après les trois questions précédente, on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)$.
Si $\mathrm{rg}(A) = p$ alors $\mathrm{rg}({}^tAA) = p$ et donc ${}^tAA$ est inversible. Une condition suffisante sur A pour que ${}^tAA$ soit inversible est donc $\mathrm{rg}(A) = p$.
Réciproquement, si $\mathrm{rg}({}^tAA) = p$ alors $\mathrm{rg}(A) = p$. Cette condition est donc aussi nécessaire.

5. D'après la question 3., si ${}^tTT$ est inversible alors $\hat{\beta} = ({}^tTT)^{-1}TY$.

Partie 2

1. a) L'affirmation est fausse car dans les n premières colonnes de la matrice `mat` on retrouve la matrice A qui ne peut pas être nulle car on l'a supposée inversible.

   b) L'affirmation est fausse car `mat` est une matrice possédant n lignes et $2n$ colonnes alors que A est une matrice carrée à n lignes et n colonnes.

   c) L'affirmation est fausse car $n > 0$ donc les instructions `range(0,n)` ont bien du sens, et de plus i et j sont compris entre 0 et $n-1$ donc l'appel $A[i,j]$ a bien du sens.

   d) L'affirmation est vraie. Au départ `mat` est une matrice à n lignes et $2n$ colonnes ne contenant que des 0 puis les deux boucles `for` permettent d'insérer dans les n premières colonnes de `mat` les coefficients de la matrice A.

2. a) La fonction `multip` modifie la matrice M en multipliant la ligne i de M par le réel c.

   b)
```
def ajout(M,i,j,c):
    p=np.shape(M)[1]
    for k in range(0,p):
        M[i,k]+=c*M[j,k]
```

   c)
```
def permut(M,i,j):
    p=np.shape(M)[1]
    for k in range(p):
        M[i,k],M[j,k]=M[j,k],M[i,k]
```

3.
```
def rang_pivot(M,j):
    r=j
    n=np.shape(M)[0]
    for k in range(j,n):
        if abs(M[k,j])>abs(M[r,j]):
            r=k
    return(r)
```

Dans ce programme r est le plus petit numéro de ligne où l'on rencontre la valeur maximale recherchée car on ne change la valeur de r que si on trouve une valeur strictement supérieure à la précédente.

4. a) Dans cet exemple $n = 3$ donc on fait 3 passages dans la boucle `for` et donc la fonction `print(M)` est exécutée 3 fois.

Pour $j = 0$, on affiche $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour $j = 1$, on affiche $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Pour $j = 2$, on affiche $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ (pas de changement par rapport à $j = 1$).

b) Cette algorithme transforme, par des opérations éléments sur les lignes, la matrice M initiale en une matrice ne contenant que des 0 sous la « diagonale » par opérations élémentaires sur la matrice M, au sens où tous les éléments situés en position (i, j) avec $i > j$ sont nuls après cette fonction. De plus à chaque étape on choisit de prendre comme « pivot » le plus grand élément de la colonne en valeur absolue.

On a donc échelonné la matrice M en gardant les plus grands pivots en valeur absolue.

5. a)
```
def reduire(M):
    n = np.shape(M)[0]
    mystere(M)
    for i in range(0, n):
        multip(M, i, 1/M[i,i])
    for j in range(n-1,0,-1): #range décroissant
        for k in range(j-1,-1,-1):
            ajout(M,k,j,-M[k,j])
```

b) Cette fonction commence par appliquer les opérations élémentaires sur la matrice M permettant d'échelonner M (fonction `mystere`), puis l'ensemble des éléments en position (i, i) de la matrice sont ramenés à 1 (possible car la sous-matrice de M constituée des n premières colonnes est supposée inversible donc les pivots sont tous non nuls), et enfin on effectue les opérations élémentaires manquantes permettant de transformer la sous-matrice de M constituée des n premières colonnes en la matrice identité.

6. a)
```
def augmenter(A):
    n=np.shape(A)[0]
    mat=initialisation(A) #la partie de gauche de mat contient la matrice A
    for i in range(0,n):
        mat[i,n+i]=1 #on remplit la partie de droite avec la matrice identité
    return mat
```

b) D'après la partie I, pour calculer l'inverse de A il suffit de :

— augmenter la matrice A (fonction `augmenter`) ;

— appliquer la fonction `reduire` à la matrice augmentée ;

— récupérer les n dernières colonnes de la matrice augmentée après action de la fonction `reduire`.

c)
```
def inverser(A):
    n=np.shape(A)[0]
    mat=augmenter(A)
    reduire(mat)
    return mat[0:n,n:2*n]
```

d) Nous venons de programmer la méthode miroir mais le nom de cette méthode est hors-programme...

Partie 3

1. L'équation homogène associée à (1) est : $x'(t) = -kx(t)$ et admet pour solution toutes les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-kt}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Un solution particulière sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation (1) avec $u = h$ définie dans (2) est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{k}$.

   Ainsi les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}^+$ sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-kt} + \dfrac{1}{k}$.

   Avec la condition initiale $x(0) = 0$, la solutions de (1) sur $\mathbb{R}^+$ est :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad x(t) = \frac{1}{k}(1 - e^{-kt}).$$

2. a) D'après la figure 5. $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant t < \Delta \\ 0 & \text{si } t \geqslant \Delta \end{cases}$.

   Or $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$ et $h(t - \Delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \Delta \\ 1 & \text{si } t \geqslant \Delta \end{cases}$.

   Donc on a bien $h(t) - h(t - \Delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant t < \Delta \\ 0 & \text{si } t \geqslant \Delta \end{cases} = \delta(t)$.

   b) Sur $[0; \Delta[$, l'équation différentielle est identique à celle de la question 1. de cette partie.

   Donc $x(t) = \dfrac{1 - e^{-kt}}{k}$ pour tout $t \in [0; \Delta[$.

3. Pour $t \geqslant t_i$, on a $u(t) = 0$. Donc sur $[t_i; +\infty[$ l'équation (1) est l'équation homogène $x'(t) = -kx(t)$ et ses solutions sont de la forme λe^{-kt}.

   Afin de pouvoir utiliser la condition initiale $x(0) = 0$, il nous faut aussi déterminer les solutions de (1) sur $[0; t_{i-1}[$ et $[t_{i-1}; t_i]$.

   Sur $[0; t_{i-1}[$, x doit être de la forme $t \mapsto \lambda_1 e^{-kt}$ et la condition initiale $x(0) = 0$, nous impose donc que $x(t) = 0$ sur $[0; t_{i-1}[$.

   Sur $[t_{i-1}; t_i[$, l'équation à résoudre est proche de celle de la question 1. Donc $x(t) = \lambda_2 e^{-kt} + \dfrac{u_i}{k}$ avec $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

   La fonction x recherchée doit être dérivable donc continue en t_{i-1}. On doit donc avoir $x(t_{i-1}) = 0$ et ainsi $\lambda_2 = -\dfrac{u_i}{k} e^{kt_{i-1}}$.

   Sur $[t_{i-1}; t_i[$, $x(t) = \dfrac{u_i}{k}(1 - e^{-k(t - t_{i-1})})$.

   Grâce à la continuité de la fonction x en t_i on en déduit que $x(t_i) = \dfrac{u_i}{k}(1 - e^{-k(t_i - t_{i-1})})$ et donc $\lambda = \dfrac{u_i}{k}(e^{kt_i} - e^{kt_{i-1}})$.

   En conclusion, pour $t \geqslant t_i$,

$$x(t) = \frac{u_i}{k}(e^{kt_i} - e^{kt_{i-1}}) \times e^{-kt} = u_i \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t - t_i)}.$$

4. Montrons par récurrence sur $i \in \mathbb{N}^*$, que la propriété $\mathscr{P}(i)$: $x(t_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} u_j \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t_i - t_j)}$ est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

   — Pour $i = 1$: Sur $[0; t_1[$, $u(t) = u_1$ donc $x(t) = u_1 \dfrac{1 - e^{-kt}}{k}$ et ainsi, par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction x, on a $x(t_1) = u_1 \dfrac{1 - e^{-kt_1}}{k} = u_1 \dfrac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{t_1 - t_1}$.
   Donc $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.

   — Soit $i \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(i)$ vraie. Sur $[t_i; t_{i+1}[$, x est solution de

$$x'(t) + kx(t) = u_{i+1} \qquad \text{et} \qquad x(t_i) = \sum_{j=1}^{i} u_j \frac{1 - e^{-k\Delta}}{k} e^{-k(t_i - t_j)}.$$

On en déduit donc que $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{-kt} + \dfrac{u_{i+1}}{k}$, puis on trouve λ en fonction de $x(t_i)$:

$$\lambda = \mathrm{e}^{kt_i}\left(x(t_i) - \frac{u_{i+1}}{k}\right)$$

On en déduit alors que sur $[t_i;t_{i+1}[$, $x(t) = \dfrac{u_{i+1}}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_i)}\right) + \mathrm{e}^{-k(t-t_i)}x(t_i)$.

Grâce à la continuité de x sur $\mathbb{R}$ on en déduit :

$$\begin{aligned}
x(t_{i+1}) &= \frac{u_{i+1}}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-k\Delta}\right) + \mathrm{e}^{-k\Delta}x(t_i) \\
&= \frac{u_{i+1}}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-k\Delta}\right) + \mathrm{e}^{-k\Delta}\sum_{j=1}^{i} u_j \frac{1-\mathrm{e}^{-k\Delta}}{k}\mathrm{e}^{-k(t_i-t_j)} \\
&= \frac{u_{i+1}}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-k\Delta}\right) + \sum_{j=1}^{i} u_j \frac{1-\mathrm{e}^{-k\Delta}}{k}\mathrm{e}^{-k(t_{i+1}-t_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{i+1} u_j \frac{1-\mathrm{e}^{-k\Delta}}{k}\mathrm{e}^{-k(t_{i+1}-t_j)}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(i+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $x(t_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} u_j \frac{1-\mathrm{e}^{-k\Delta}}{k}\mathrm{e}^{-k(t_i-t_j)}$.

5. Reprenons la formule pour $x(t_i)$:

$$\begin{aligned}
x(t_i) &= \sum_{j=1}^{i} u_j \frac{1-\mathrm{e}^{-k\Delta}}{k}\mathrm{e}^{-k(t_i-t_j)} = \frac{1-\mathrm{e}^{-k\Delta}}{k}\sum_{j=1}^{i} u_j \mathrm{e}^{-k\Delta(i-j)} \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-k\Delta}}{k}\sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell}\mathrm{e}^{-k\Delta\ell} \qquad \text{on a posé } \ell = i-j \\
&= \nu \sum_{\ell=0}^{i-1} u_{i-\ell}\Phi^{\ell},
\end{aligned}$$

avec $\nu = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-k\Delta}}{k}$ et $\Phi = \mathrm{e}^{-k\Delta}$.

6. Comme k et Δ sont strictement positifs on a $(\Phi^{\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ qui est une suite géométrique de raison appartenant à $]0;1[$ donc cette suite est décroissante et converge vers 0.
Interprétation ? ? ?

Partie 4

1. a) Lorsque $p = 0$, $\mathrm{cov}(Z_n, Z_{n+p}) = \mathrm{cov}(Z_n, Z_n) = V(Z_n) = \sigma^2$.
Lorsque p est différent de 0, les variables Z_n et Z_{n+p} sont indépendantes donc $\mathrm{cov}(Z_n, Z_{n+p}) = 0$.

   b) L'espérance des Z_n est bien constante car on suppose que pour tout n, $E(Z_n) = m$.
Et on a $\mathrm{cov}(Z_n, Z_{n+p}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui est un résultat indépendant de n.
Donc la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les conditions demandées et est donc un processus stationnaire.

2. a) Par linéarité de l'espérance $E(X_n) = E(W_n) + \theta E(W_{n-1}) = 0 + \theta \times 0 = 0$.

   b) La covariance étant linéaire par rapport à chacune de ses variables :

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X_n, X_{n+p}) &= \mathrm{cov}(W_n + \theta W_{n-1}, W_{n+p} + \theta W_{n+p-1}) \\
&= \mathrm{cov}(W_n, W_{n+p}) + \theta\mathrm{cov}(W_{n-1}, W_{n+p}) + \theta\mathrm{cov}(W_n, W_{n+p-1}) + \theta^2\mathrm{cov}(W_{n-1}, W_{n+p-1}) \\
&= \gamma_W(p) + \theta\gamma_W(p+1) + \theta\mathrm{cov}(W_n, W_{n+p-1}) + \theta^2\gamma_W(p)
\end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{cov}(X_n, X_{n+p}) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & \text{si } p = 0 \\ \theta\sigma^2 & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

c) L'espérance de X_n ne dépend pas de n et le résultat de $\mathrm{cov}(X_n, X_{n+p})$ ne dépend pas de n.
Donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les conditions demandées et est donc un processus stationnaire.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si X_n est solution de l'équation (5), alors avec la linéarité de l'espérance, on a :

$$E(X_n) - \phi E(X_{n-1}) = 0 \Longrightarrow \mu(1-\phi) = 0.$$

Or $\phi \neq 1$ donc $\mu = 0$.
Ainsi $E(X_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme le suggère l'énoncé multiplions l'équation (5) par X_n et prenons l'espérance. On obtient :

$$E(X_n^2) - \phi E(X_n X_{n-1}) = E(X_n W_n).$$

Or $\gamma_X(0) = \mathrm{cov}(X_n, X_n) = V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = E(X_n)^2$ d'après la question précédente.
De plus $\gamma_X(1) = \mathrm{cov}(X_{n-1}, X_n) = E(X_{n-1}X_n) - E(X_{n-1})E(X_n) = E(X_{n-1}X_n)$, toujours grâce à la question précédente.
On a donc bien $\gamma_X(0) - \phi\gamma_X(1) = E(X_n W_n)$.

c) (1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $X_n = W_n + \phi X_{n-1}$ donc $E(X_n W_n) = E(W_n^2) + \phi E(W_n X_{n-1})$.
D'après ce que l'énoncé nous fait admettre, on a $E(W_n X_{n-1}) = 0$ et de plus
$E(W_n^2) = V(W_n) + E(W_n)^2 = \sigma^2$.
Donc on a bien $E(W_n X_n) = \sigma^2$.

(2) En suivant les consignes de l'énoncé on a : $E(X_n X_{n-1}) - \phi E(X_{n-1}^2) = E(X_{n-1} W_n)$.
Or $E(X_n X_{n-1}) = \gamma_X(1)$ et $E(X_{n-1}^2) = \gamma_X(0)$. De plus, on a admit que $E(X_{n-1}W_n) = 0$.
Donc $\gamma_X(1) - \phi\gamma_X(0) = 0$.

(3) En reprenant les trois question précédentes on a :

$$\begin{cases} \gamma_X(0) - \phi\gamma_X(1) = \sigma^2 \\ \gamma_X(1) - \phi\gamma_X(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_X(0) = \dfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\ \gamma_X(1) = \dfrac{\sigma^2\phi}{1-\phi^2} \end{cases},$$

la division par $1-\phi^2$ étant rendue possible par l'hypothèse $-1 < \phi < 1$.

d) On peut remarquer, grâce à (5) que :

$$\begin{aligned} &X_n - \phi X_{n-1} = W_n \\ &X_{n-1} - \phi X_{n-2} = W_{n-1} \\ &X_{n-2} - \phi X_{n-3} = W_{n-2} \\ &\vdots \\ &X_{n-p} - \phi X_{n-p-1} = W_{n-p} \end{aligned}$$

En multipliant la deuxième ligne par ϕ, la troisième par ϕ^2,..., la $p+1$-ième par ϕ^p, et en sommant, on obtient

$$X_n = \sum_{k=0}^{p} \phi^k W_{n-k} + \phi^{p+1} X_{n-(p+1)}.$$

En choisissant $p = n-1$ on obtient

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k W_{n-k} + \phi^n X_0.$$

Comme X_n modélise la hauteur du lac aux instants n, on peut formuler l'hypothèse que $X_0 = 0$.
On obtient donc $X_n = \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k W_{n-k}$ ce qui se rapproche de l'équation (3) et donc W_n représente alors, à une constante multiplicative près, le débit d'entrée du lac aux instants n.

Partie 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le modèle (6) peut se réécrire :

$$X_n - X_{n-1} = W_n - (1-\phi)X_{n-1}.$$

On peut alors interpréter :

— $X_n - X_{n-1}$ représente la différence de hauteur entre les instants n et $n-1$;

— W_n représente, à une constante multiplicative près, le débit entrant (on pourra remarquer que l'espérance de W_n n'est plus supposée nulle) ;

— le terme $(1-\phi)X_{n-1}$ représente alors le débit sortant (toujours à une constante multiplicative près) et on remarque qu'il est proportionnel à la hauteur à l'instant $n-1$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}*$.

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_U(0) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(U_j - \overline{U})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(U_j^2 - 2U_j\overline{U} + \overline{U}^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}U_j^2 - 2\overline{U} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}U_j}_{\overline{U}} + \overline{U}^2 \times \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}1 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}U_j^2 - 2\overline{U}^2 + \overline{U}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}U_j^2 - \overline{U}^2.
\end{aligned}$$

b) Par linéarité de l'espérance :

$$E(\hat{\gamma}_U(0)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E(U_j^2) - E(\overline{U}^2).$$

Or on a supposé que (U_n) est un processus stationnaire donc $\gamma_U(0) = V(U_j) = E(U_j^2) + E(U_j)^2$ et donc $E(U_j^2) = \gamma_U(0) + m^2$.
On a donc

$$\begin{aligned}
E(\hat{\gamma}_U(0)) &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2}E\left(\left(\sum_{j=1}^{n}U_j\right)^2\right) \\
&= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{j=1}^{n}U_j^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}U_iU_j\right) \\
&= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2}\left(n(\gamma_U(0) + m^2) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}E(U_iU_j)\right) \\
&= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2}\left(n(\gamma_U(0) + m^2) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E(U_iU_j)\right) \\
&= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2}\left(n(\gamma_U(0) + m^2) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{p=1}^{n-i}E(U_iU_{i+p})\right) \qquad \text{avec } j = i+p
\end{aligned}$$

De plus, on a $\gamma_U(p) = E(U_nU_{n+p}) - E(U_n)E(U_{n+p}) = E(U_nU_{n+p}) - m^2$, donc $E(U_iU_{i+p}) = \gamma_U(p) + m^2$.
Reprenons notre calcul :

$$\begin{aligned}E(\hat{\gamma}_U(0)) &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2}\left(n(\gamma_U(0)+m^2) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{p=1}^{n-i}(\gamma_U(p)+m^2)\right)\\ &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2}\left(n(\gamma_U(0)+m^2) + 2\sum_{p=1}^{n-1}\underbrace{\sum_{i=1}^{n-p}(\gamma_U(p)+m^2)}_{=(n-p)(\gamma_U(p)+m^2)}\right)\\ &= \gamma_U(0) + m^2 - \frac{1}{n^2}\left(n(\gamma_U(0)+m^2) + 2\sum_{p=1}^{n-1}(n-p)(\gamma_U(p)+m^2)\right)\end{aligned}$$

c) On remarque que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}(n-p)m^2 = m^2\sum_{k=1}^{n-1}k = m^2\frac{n(n-1)}{2}$.

Donc $\displaystyle nm^2 + \sum_{p=1}^{n-1}(n-p)m^2 = n^2m^2$ et ainsi $\displaystyle m^2 - \frac{1}{n^2}\left(nm^2 + \sum_{p=1}^{n-1}(n-p)m^2\right) = 0$.

Le résultat précédent devient donc $\displaystyle E(\hat{\gamma}_U(0)) = \gamma_U(0) - \frac{1}{n^2}\left(n\gamma_U(0) + 2\sum_{p=1}^{n-1}(n-p)\gamma_U(p)\right)$.

d) On suppose donc que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\gamma_U(p)$ est absolument convergente.

On réécrit le résultat de la question précédente :

$$E(\hat{\gamma}_U(0)) = \gamma_U(0) - \frac{1}{n}\gamma_U(0) - \frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{n-1}(n-p)\gamma_U(p).$$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\gamma_U(0) = 0$ et de plus

$$\left|\frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{n-1}(n-p)\gamma_U(p)\right| \leqslant \frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{n-1}\underbrace{(n-p)}_{\leqslant n}|\gamma_U(p)| \leqslant \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n-1}|\gamma_U(p)|.$$

Comme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}|\gamma_U(p)|$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n-1}|\gamma_U(p)| = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{n-1}(n-p)\gamma_U(p) = 0$. On en déduit donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}E(\hat{\gamma}_U(0)) = \gamma_U(0)$.

3. On pourrait considérer (X_n) le processus de variables aléatoire correspondant aux niveaux du lac Huron à partir de l'année initiale notée 0 et les indices n correspondent aux années successives. On suppose que l'on connait les valeurs de $X_0, \ldots, X_k$ des niveaux du lac sur les k premières année. Le modèle proposé s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \mu - \phi X_{n-1} + Z_n,$$

avec (Z_n) un bruit blanc d'espérance nulle.
Avec les données des k premières années on détermine :
— $\hat{\mu}$ et $\hat{\phi}$ est estimations de μ et ϕ par exemple avec la méthode des moindres carrés ;
— on calcule alors les réalisation des variables $U_0, \ldots, U_k$,
— on calcule aussi l'estimation $\hat{\gamma}_U(0)$ de $\gamma_U(0)$ qui nous fournit une estimation de σ^2,
— on crée un bruit blanc d'espérance nulle avec par exemple une suite $(\tilde{Z}_n)$ de variable indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2)$ (question 1. partie 4).

On peut alors prédire les niveaux avec la relation de récurrence :

$$\forall n > k, \quad X_n = \hat{\mu} - \hat{\phi}X_{n-1} + \tilde{Z}_n.$$