Banque Agro-véto 2018 Maths

Correction

Exercice :

1. La fonction f est constante et nulle sur $]-\infty;0]$. Il nous suffit donc d'étudier précisément la fonction sur $]0;+\infty[$.

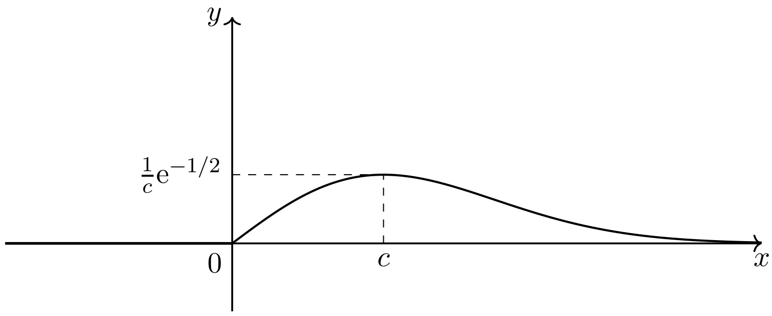
   Sur $]0;+\infty[$, la fonction f est dérivable et $f'(t) = \dfrac{1}{c^2}\left(1-\dfrac{t^2}{c^2}\right)\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}$.

   $f'(t)$ est donc du signe de $1-\dfrac{t^2}{c^2}$, on obtient donc le tableau de variation suivant :

t	0		c		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{c}\mathrm{e}^{-1/2}$	$\searrow$	0

   On a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, d'après la règle des croissances comparées.

   Le maximum de f est atteint pour $t = c$ et il faut $f(c) = \dfrac{1}{c}\mathrm{e}^{-1/2}$.



2. — La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   — La fonction f est continue sur $]-\infty;0]$ car elle est nulle sur cet intervalle.
   Sur $]0;+\infty[$, f est une composée et un produit de fonctions usuelles continues donc f est continue sur cet intervalle.
   Ceci prouve que f est continue sur $\mathbb{R}^*$. (*On pourrait aussi montrer que f est continue en 0 mais ce n'est pas utile ici car le théorème du cours demande que f soit continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.*)
   — Pour tout $t \leqslant 0$, $f(t) = 0$ donc on a bien $f(t) \geqslant 0$.
   Pour tout $t > 0$, $\dfrac{t}{c^2} > 0$ et $\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)} > 0$, donc $f(t) \geqslant 0$.
   f est une fonction positive.
   — Comme f est nulle sur $]-\infty;0]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 0.

   Sur $[0;+\infty[$ la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}$ est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.
   Soit $x > 0$. On a :
$$\int_0^x \frac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\right]_0^x = 1-\mathrm{e}^{-x^2/(2c^2)}.$$
   Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-x^2/(2c^2)} = 1$.
   Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 1.

   En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 1.

   Ces quatre points prouvent que f est une densité de probabilité.

3. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

   b) On effectue le changement de variable $x = \dfrac{t}{c}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{c}$, est strictement croissante et $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t}{c} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{c} = +\infty$.

   Ainsi, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} c\,\mathrm{d}x$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes, et ont la même valeur.

   D'après la question précédente et le fait que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est paire, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

   On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t = c\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

   c) X possède une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

   Sur $]-\infty;0]$ la fonction $t \mapsto tf(t)$ est nulle. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 0.

   Sur $[0;+\infty[$, on considère $A > 0$. On a alors, par intégration par parties :

$$\int_0^A |tf(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^A t\times\frac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\Big]_0^A + \int_0^A \mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t = -A\mathrm{e}^{-A^2/(2c^2)} + \int_0^A \mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t.$$

   Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -A\mathrm{e}^{-A^2/(2c^2)} = 0$ et d'après la question précédente $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t = c\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

   Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A tf(t)\,\mathrm{d}t = c\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

   En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc X admet une espérance et $E(X) = c\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

4. Supposons dans cette question que X^n admet une espérance. Pour montrer que X^{n+2} admet une espérance, il faut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui revient ici à étudier la convergence sans la valeur absolue car $t^{n+2}f(t) \geqslant 0$.

   Sur $]-\infty;0]$ la fonction $t \mapsto t^{n+2}f(t)$ est nulle. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^{n+2}f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 0.

   Sur $[0;+\infty[$, on considère $A > 0$. On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A t^{n+2}f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A t^{n+2}\times\frac{t}{c^2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[-t^{n+2}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\Big]_0^A + \int_0^A (n+2)t^{n+1}\mathrm{e}^{-t^2/(2c^2)}\,\mathrm{d}t\\ &= -A^{n+2}\mathrm{e}^{-A^2/(2c^2)} + (n+2)c^2\int_0^A t^n f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -A^{n+2}\mathrm{e}^{-A^2/(2c^2)} = 0$ et par hypothèse dans cette question $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A t^n f(t)\,\mathrm{d}t = E(X^n)$.

   Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A t^{n+2}f(t)\,\mathrm{d}t = (n+2)c^2E(X^n)$.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc X^{n+2} admet une espérance et $E(X^{n+2}) = (n+2)c^2E(X^n)$.

5. Montrons par récurrence que pour tout entier n, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $E(X^{2n}) = 2^n c^{2n} n!$ et $E(X^{2n+1}) = \sqrt{2\pi}\dfrac{(2n+1)!c^{2n+1}}{2^{n+1}n!}$ » est vraie pour tout entier n.
   - Pour $n = 0$: On a $E(X^0) = 1$ et $2^0c^00! = 1$.
     De plus $E(X^1) = c\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$ et $\sqrt{2\pi}\dfrac{1!c^1}{2\times 1!} = c\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
     Donc $\mathscr{P}(0)$ est bien vérifiée.
   - Soit n un entier naturel fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
     D'après la question précédente $E(X^{2(n+1)}) = c^2(2n+2)E(X^{2n})$.
     Donc d'après $\mathscr{P}(n)$, $E(X^{2(n+1)}) = c^2(2n+2)2^nc^{2n}n! = 2^{n+1}c^{2(n+1)}(n+1)!$.
     D'après la question précédente $E(X^{2(n+1)+1}) = E(X^{2n+3}) = c^2(2n+3)E(X^{2n+1})$.
     Donc d'après $\mathscr{P}(n)$,
     $$\begin{aligned} E(X^{2(n+1)+1}) &= c^2(2n+3)\sqrt{2\pi}\frac{(2n+1)!c^{2n+1}}{2^{n+1}n!} \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{(2n+2)\times 2^{n+1}n!} \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{2^{n+2}(n+1)!}. \end{aligned}$$
     Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

   Grâce au principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^{2n}) = 2^nc^{2n}n!$ et $E(X^{2n+1}) = \sqrt{2\pi}\dfrac{(2n+1)!c^{2n+1}}{2^{n+1}n!}$.

6. a) Si X admet une variance, alors pour tout $\varepsilon > 0$,
   $$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$
   b) D'après la question 5, X^2 admet une espérance et $E(X^2) = 2c^2$.
   Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2c^2 - \dfrac{c^2\pi}{2} = c^2\left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$.
   c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on sait que
   $$P\left(X \in [E(X)-\varepsilon; E(X)+\varepsilon]\right) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$
   (comme X est une variable à densité on peut mettre des crochets fermés à l'intervalle.)
   On pose alors $\varepsilon = 10c\sqrt{\dfrac{4-\pi}{2}}$, $\alpha = c\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} - 10c\sqrt{\dfrac{4-\pi}{2}}$ et $\beta = c\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} + 10c\sqrt{\dfrac{4-\pi}{2}}$, et on a donc bien
   $$P(X \in [\alpha;\beta]) \geqslant 0,99.$$

7. On sait que $P(X \in [0;\gamma]) = \displaystyle\int_0^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\gamma^2/(2c^2)}$.
   Donc pour avoir $P(X \in [0;\gamma]) = 0,99$, il faut prendre $\gamma = 2c\sqrt{\ln(10)}$.

8.

Problème :

I. Matrice de transition

1. a) La famille $([X_n=0],[X_n=1],[X_n=2])$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=0) &= P(X_n=0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0)+P(X_n=1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0)\\ &\qquad +P(X_n=2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=0)\\ &= \frac{1}{2}P(X_n=1).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=1) &= P(X_n=0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1)+P(X_n=1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1)\\ &\qquad +P(X_n=2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}P(X_n=1)\\ &= 1P(X_n=0)+1P(X_n=2).\\ P(X_{n+1}=2) &= P(X_n=0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=2)+P(X_n=1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=2)\\ &\qquad +P(X_n=2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=2)\\ &= \frac{1}{2}P(X_n=1).\end{aligned}$$

On a donc bien $Y_{n+1}=A_2Y_n$ avec A_2 la matrice donnée dans l'énoncé.

b) Déterminons les valeurs propres de A_2. On cherche les réels λ tels que $\mathrm{rg}(A_2-\lambda I_3)<3$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A_2-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-\lambda & 1/2 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2 & -\lambda\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2 & -\lambda\\ -\lambda & 1/2 & 0\end{pmatrix} && L_1\leftarrow L_2\leftarrow L_3\leftarrow L_1\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2 & -\lambda\\ 0 & 1/2-\lambda^2 & \lambda\end{pmatrix} && L_3\leftarrow L_3+\lambda L_1\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2 & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda^2)\end{pmatrix} && L_3\leftarrow \tfrac{1}{2}L_3+\left(\lambda^2-\tfrac{1}{2}\right)L_2\end{aligned}$$

Ainsi les valeurs propres de A_2, sont les solutions de $\lambda(1-\lambda^2)=0$, c'est-à-dire 0, 1 et -1.
A_2 est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admettant trois valeurs propres distinctes, donc A_2 est diagonalisable.

2. La famille $([X_n=0],[X_n=1],\dots,[X_n=N])$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $i\in[\![0;N]\!]$:

$$P(X_{n+1}=i)=\sum_{k=0}^{N}P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=i).$$

Or, si $k\neq i-1$ et $k\neq i+1$, $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=i)=0$. De plus, si $i-1\geqslant 0$, $P_{[X_n=i-1]}(X_{n+1}=i)=\dfrac{N-i+1}{N}$ (probabilité de choisir un nombre strictement supérieur au nombre de boules contenues dans U_1 c'est-à-dire $i-1$) et, si $i+1\leqslant N$, $P_{[X_n=i+1]}(X_{n+1}=i)=\dfrac{i+1}{N}$ (probabilité de choisir un nombre entre 1 et $i+1$).
On obtient donc :

$$P(X_{n+1}=0)=\frac{1}{N}P(X_n=1),\qquad P(X_{n+1}=N)=\frac{1}{N}P(X_n=N-1),$$

$$\forall i\in[\![1;N-1]\!],\quad P(X_{n+1}=i)=\frac{N-i+1}{N}P(X_n=i-1)+\frac{i+1}{N}P(X_n=i+1).$$

On a donc bien $Y_{n+1}=AY_n$, avec A la matrice donnée dans l'énoncé.

3. — Pour $N=2$:

$$ {}^tA_2 X = X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \dfrac{x+z}{2} = y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z. $$

$E_1({}^tA_2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

— Pour $N=3$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$ {}^tA_3 X = X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \dfrac{x+2z}{3} = y \\ \dfrac{2y+t}{3} = z \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t. $$

$E_1({}^tA_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

4. On peut remarquer que dans la matrice A lorsqu'on somme les éléments d'une colonne on obtient 1.

   Donc ${}^tA\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, ce qui signifie que 1 est bien valeur propre de ${}^tA$.

5. On remarque que ${}^t(A - I_{n+1}) = {}^tA - I_{N+1}$, donc, comme 1 est valeur propre de ${}^tA$, ${}^t(A - I_{n+1})$ n'est pas inversible.

   Une matrice et sa transposée ont le même rang, donc $\text{rg}(A - I_{N+1}) = \text{rg}({}^t(A - I_{n+1})) < N+1$ et donc 1 est bien valeur propre de A.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

1. Dans l'urne U_1, entre l'instant n et l'instant $n+1$, on a soit ajouté soit retiré une boule. Donc $(X_{n+1} - X_n)(\Omega) = \{-1; 1\}$.

2. D'après la question précédente

$$ E(X_{n+1} - X_n) = (-1) \times P(X_{n+1} - X_n = -1) + 1 \times P(X_{n+1} - X_n = 1). $$

   Or la famille $([X_n = 0], [X_n = 1], \ldots, [X_n = N])$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $i \in [\![0; N]\!]$:

$$ \begin{aligned} P(X_{n+1} - X_n = 1) &= \sum_{k=0}^{N} P(X_n = k) P_{[X_n = k]}(X_{n+1} - X_n = 1) \\ &= \sum_{k=0}^{N} P(X_n = k) P_{[X_n = k]}(X_{n+1} = k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{N} P(X_n = k) \times \frac{N-k}{N}. \end{aligned} $$

   De même

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}-X_n=-1) &= \sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}-X_n=-1)\\
&= \sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k-1)\\
&= \sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\times\frac{k}{N}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}-X_n) &= -\sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\times\frac{k}{N}+\sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\times\frac{N-k}{N}\\
&= -\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N} kP(X_n=k)+\sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\\
&= 1-\frac{2}{N}E(X_n).
\end{aligned}$$

3. D'après la linéarité de l'espérance et la question précédente :

$$E(X_{n+1}) = 1+\frac{N-2}{N}E(X_n).$$

$(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique. On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}, E(X_n) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n\left(E(X_0)-\frac{N}{2}\right)+\frac{N}{2}.$$

4. Comme $N>2$, $0<\dfrac{N-2}{N}<1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)=\dfrac{N}{2}$.
Au bout d'un temps très long on tend vers une répartition des boules moitié/moitié dans chaque urne.

III. Étude de la probabilité stationnaire

1. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(k)$: « $x_k=\binom{N}{k}x_0$ », est vraie pour tout $k\in[\![0;N]\!]$.

— Pour $k=0$, $\binom{N}{0}x_0 = 1\times x_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est bien vérifiée.
De plus en regardant la première ligne de l'égalité $AX=X$, on a $\dfrac{1}{N}x_1=x_0$, donc $x_1=\binom{N}{1}x_0$.
$\mathscr{P}(1)$ est bien vraie.

— Soit $k\in[\![1;N-2]\!]$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(i)$ vraie pour tout $0\leqslant i\leqslant k$.
On sait que $AX=X$, donc en ne s'intéressant qu'à la ligne $k+1$ on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{N-k+1}{N}x_{k-1}+\frac{k+1}{N}x_{k+1}=x_k\\
\Rightarrow x_{k+1} &= \frac{N}{k+1}\binom{N}{k}x_0-\frac{N-k+1}{k+1}\binom{N}{k-1}x_0\\
&= \frac{N}{N-k}\binom{N}{k+1}x_0-\frac{k}{N-k}\binom{N}{k+1}x_0\\
&= \binom{N}{k+1}x_0
\end{aligned}$$

Grâce au principe de récurrence, on a montré que pour tout $k\in[\![0;N-1]\!]$, $x_k=\binom{N}{k}x_0$.

Il reste à s'intéresser à la dernière ligne de l'égalité $AX=X$. On a alors $\dfrac{1}{N}x_{N-1}=x_N$, donc $x_N=\dfrac{1}{N}\binom{N}{N-1}x_0=x_0=\binom{N}{N}$.

2. D'après la question précédente, $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \binom{N}{1} \\ \binom{N}{2} \\ \vdots \\ \binom{N}{N} \end{pmatrix}\right)$.

   Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \binom{N}{1} \\ \binom{N}{2} \\ \vdots \\ \binom{N}{N} \end{pmatrix}\right)$, qui est une famille libre car formée d'un seul vecteur non nul et génératrice de E_1, est une base de E_1 et par conséquent $\dim(E_1) = 1$.

3. D'après la formule du binôme de Newton, $S = (1+1)^N = 2^N$.

4. D'après la question 1. :

$$\pi \in E_1 \Leftrightarrow \pi_k = \binom{N}{k}\pi_0$$

   Donc pour que π appartienne à E_1 et que la somme de ses coordonnées soit égale à 1, il faut avoir $\pi_0 = \dfrac{1}{2^N}$.

   Réciproquement, le vecteur π tel que $\pi_k = \dfrac{1}{2^N}\binom{N}{k}$ appartient bien à E_1 et vérifie que la somme de ses coordonnées vaut 1.

   $\pi = \dfrac{1}{2^N}\begin{pmatrix} 1 \\ \binom{N}{1} \\ \binom{N}{2} \\ \vdots \\ \binom{N}{N} \end{pmatrix}$.

5. On reconnait ici que X_∞ suit une loi binomiale de paramètres N et $\dfrac{1}{2}$.

   On a donc $E(X_\infty) = \dfrac{N}{2}$ et $V(X_\infty) = \dfrac{N}{4}$.

6. On rappelle que Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$.
   On peut donc montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = A^n Y_0$.
   Or, comme X_0 suit la même loi que X_∞, on a $Y_0 = \pi$.
   Et comme $\pi \in E_1$, $A\pi = \pi$ et donc on peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n\pi = \pi$.
   Ainsi, on a $Y_n = \pi$ et X_n suit donc la même loi que X_∞, c'est-à-dire une loi binomiale de paramètres N et $\dfrac{1}{2}$.
   Lorsqu'on démarre dans une situation de loi binomiale de paramètres N et $\dfrac{1}{2}$, on reste dans cet état à chaque étape.