ENS filière BCPST 2019

Partie 1 :

1.1. Soit $p : [\![1;n]\!] \to [\![1;n]\!]$ une permutation et M sa matrice.
M est bien une matrice à n lignes et n colonnes et ses coefficients sont bien tous positifs car ce sont uniquement des 0 et des 1.
Comme p est une bijection, pour un entier i fixé, il existe un unique $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $j_0 = p(i)$.
Donc $M_{ij} = 0$ si $j \neq j_0$ et $M_{ij_0} = 1$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{ij} = 1$.
De même, pour un $j \in [\![1;n]\!]$ fixé, il existe un unique i_0 tel que $j = p(i_0)$. Donc $M_{ij} = 0$ si $i \neq i_0$ et $M_{i_0 j} = 1$.
Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 1$.
M est bien une matrice bistochastique.

1.2.

$$\begin{aligned}
b_1\sum_{j=1}^{n}c_j + \sum_{i=2}^{n}\left[(b_i - b_{i-1})\sum_{j=i}^{n}c_j\right] &= b_1\sum_{j=1}^{n}c_j + \sum_{i=2}^{n}b_i\sum_{j=i}^{n}c_j - \sum_{i=1}^{n-1}b_i\sum_{j=i+1}^{n}c_j \\
&= b_1\sum_{j=1}^{n}c_j + \sum_{i=2}^{n-1}b_i\sum_{j=i}^{n}c_j + b_nc_n - b_1\sum_{j=2}^{n}c_j - \sum_{i=2}^{n-1}b_i\sum_{j=i+1}^{n}c_j \\
&= b_1\left(\sum_{j=1}^{n}c_j - \sum_{j=2}^{n}c_j\right) + \sum_{i=2}^{n-1}b_i\left(\sum_{j=i}^{n}c_j - \sum_{j=i+1}^{n}c_j\right) + b_nc_n \\
&= b_1c_1 + \sum_{i=2}^{n-1}b_ic_i + b_nc_n = \sum_{i=1}^{n}b_ic_i.
\end{aligned}$$

1.3. Exemple

1.3.1. $p_1 : \begin{cases} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 3 \end{cases}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$p_2 : \begin{cases} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 2 \end{cases}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$p_3 : \begin{cases} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 1 \end{cases}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$p_4 : \begin{cases} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 3 \end{cases}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$p_5 : \begin{cases} 1 \to 3 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 1 \end{cases}$, $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$p_6 : \begin{cases} 1 \to 3 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \end{cases}$, $M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3.2.
- Pour p_1 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(y_{p(i)} - x_i\right)^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4.$
- Pour p_2 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(y_{p(i)} - x_i\right)^2 = 0^2 + 3^1 + 1^2 = 10.$
- Pour p_3 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(y_{p(i)} - x_i\right)^2 = 1^2 + 3^2 + (-2)^2 = 14.$
- Pour p_4 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(y_{p(i)} - x_i\right)^2 = 1^2 + (-1)^2 + 2^2 = 6.$
- Pour p_5 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(y_{p(i)} - x_i\right)^2 = 4^2 + 0^2 + (-2)^2 = 20.$

- Pour p_6 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(y_{p(i)}-x_i\right)^2 = 4^2+(-1)^2+(-1)^2 = 18$.

Dans ce cas, c'est $p_1 = \mathrm{id}$ qui minimise cette quantité.

1.4. Exemple

1.4.1. On remarque rapidement que la matrice M donnée est bien bistochastique : comme $r \in [0;1]$, on a bien r et $1-r$ qui sont positifs et de plus, la somme sur chaque ligne ou colonne est $r+1-r=1$.
On a alors $C(M) = 1^2\times(1-r)+4^2\times r+0^2\times r+3^2\times(1-r) = 6r+10$.

1.4.2. Montrons que les matrice bistochastique de taille $(2,2)$ sont de la forme des matrices de la question précédente.

Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique. Écrivons M sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On sait alors que a, b, c et d sont positifs. De plus :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ c+d=1 \\ a+c=1 \\ b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ d=1-c \\ 1-b+c=1 \\ b+1-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ d=1-c \\ c=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ d=1-b \\ c=b \end{cases}$$

Comme $a \geqslant 0$, on en déduit que nécessairement, $b \in [0;1]$.

On a donc $M = \begin{pmatrix} 1-b & b \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec $b \in [0;1]$.

Les matrice bistochastique de taille 2 sont donc bien forcément de la forme de la matrice de la question précédente.

Pour r variant dans $[0;1]$, $C(M) = 6r+10$ est donc minimal uniquement pour $r=0$ ce qui correspond à $M = I_2$.

1.5. Matrice de permutation

1.5.1. Une permutation est une bijection de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$, donc quitte à réordonner $\{p(j), j\in[\![1;n]\!]\} = [\![1;n]\!]$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_{p(j)} = \sum_{j=1}^{n} y_j$.

Pour l'inégalité demandée, fixons nous $i \in [\![1;n]\!]$. On ordonne alors l'ensemble $\{p(j), j\in[\![i;n]\!]\}$ en l'écrivant sous la forme :

$$\{p(j), j\in[\![i;n]\!]\} = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_n\}, \qquad \text{avec } a_i < a_{i+1} < \dots a_n.$$

Les a_j sont distincts deux à deux et appartiennent tous à $[\![1;n]\!]$. On a donc nécessairement

$$a_i \leqslant i,\ a_{i+1} \leqslant i+1, \dots, a_n \leqslant n.$$

Comme les y_k sont rangés par ordre croissant, $y_{a_k} \leqslant y_k$ et donc

$$\sum_{j=i}^{n} y_{p(j)} = \sum_{j=i}^{n} y_{a_j} \leqslant \sum_{j=i}^{n} y_j.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(y_{p(i)}-x_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_{p(i)}^2 - 2\sum_{i=1}^{n} y_{p(i)}x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} y_{p(i)}x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\left(x_1\sum_{j=1}^{n} y_{p(j)} + \sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n} y_{p(j)}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2x_1\sum_{j=1}^{n} y_j - 2\sum_{i=2}^{n}\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{\geqslant 0}\underbrace{\sum_{j=i}^{n} y_{p(j)}}_{\leqslant \sum_{j=i}^{n} y_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\\
&\geqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\left(x_1\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=2}^{n}\left((x_i-x_{i-1})\sum_{j=i}^{n} y_j\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}
\end{aligned}$$

1.5.2. Pour une matrice de permutation, $M_{ij}=0$ si $p(i)\neq j$ et $M_{ip(i)}=1$.

Donc $C(M)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(y_{p(i)}-x_i\right)^2$.

On remarque aussi que $C(I_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2$. Ainsi, d'après la question précédente, pour toute matrice M de permutation, $C(M)\geqslant C(I_n)$.

La matrice identité rend bien minimale la quantité $C(M)$.

1.6. Matrices bistochastiques symétriques

1.6.1. Pour tout i,j de $[\![1;n]\!]$, comme les x_k et les y_k sont rangés par ordre croissant, les deux quantités x_i-x_j et y_i-y_j sont de même signe.

Donc $(x_i-x_j)(y_i-y_j)\geqslant 0$, ce qui donne en développant :

$$x_ix_j - x_iy_j - x_jy_i + y_iy_j \geqslant 0 \Leftrightarrow x_ix_j + y_iy_j \geqslant x_iy_j + x_jy_i.$$

1.6.2. Soit M une matrice bistochastique symétrique. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_i)^2M_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2M_{ij} - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_jx_iM_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2M_{ij}.$$

On remarque alors que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_j^2\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_j^2$ car M est bistochastique.

De même, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

De plus,

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_j M_{ji}
\end{aligned}$$

dans la deuxième somme on a échangé les noms des indices de sommation...

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i x_j M_{ji}$$

dans la deuxième double somme on échange l'ordre des deux sommes

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (y_j x_i M_{ij} + y_i x_j \underbrace{M_{ji}}_{=M_{ij}}) \text{ car matrice symétrique} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (y_j x_i + y_i x_j) M_{ij} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i y_i + x_j y_j) M_{ij} \text{ question précédente}
\end{aligned}$$

On remarque alors que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{j=1}^{n} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

De même $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j y_j M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Donc $\displaystyle 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Pour finir, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_i)^2 M_{ij} \geqslant \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{=\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}.$$

1.6.3. D'après la question précédente, en remarquant que $C(I_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2$, on a

$$C(M) \geqslant C(I_n),$$

pour tout matrice M bistochastique symétrique. Donc la matrice identité rend bien minimale la quantité $C(M)$ parmi les matrice bistochastique symétrique (I_n fait bien partie de cette catégorie).

1.7. Cas général

1.7.1. Traitons tout d'abord le cas $i = 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk} y_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{jk} \right) y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad \text{car } M \text{ est bistochastique} \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j
\end{aligned}$$

L'inégalité est donc en fait une égalité.

On suppose maintenant que $i \in [\![2;n]\!]$.

Comme les y_k sont rangés par ordre croissant, si $k \leqslant i-1$ alors $y_k \leqslant y_i$.

Donc, comme les M_{kj} sont des réels positifs, pour tout $j \geqslant i$, $\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_i$.

On en déduit donc que $\sum\limits_{j=i}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k \leqslant \left(\sum\limits_{j=i}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{jk}\right) y_i$.

On va maintenant montrer que $\sum\limits_{j=i}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{jk} = \sum\limits_{j=i}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{kj}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} &= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} + \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} - \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} - \sum_{k=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{i-1} M_{kj} \\
&\quad \text{on a regroupé les deux premiers termes et dans la troisième double somme on a renommé} \\
&\quad \text{les indices en échangeant leur nom} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} M_{jk}}_{=1=\sum\limits_{j=1}^{n} M_{kj}} - \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} - \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} \\
&= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj}.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\sum\limits_{j=i}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k \leqslant \left(\sum\limits_{j=i}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{kj}\right) y_i$.

Or, toujours parce que les y_k sont rangés par ordre croissant, $\sum\limits_{j=i}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j \geqslant \left(\sum\limits_{j=i}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i-1} M_{kj}\right) y_i$.

On a donc bien montré ce qui nous est indiqué, c'est-à-dire que :

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k \leqslant \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk} y_k &= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k + \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n} M_{jk} y_k \\
&\leqslant \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j + \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n} M_{jk} y_k \\
&\quad \text{d'après l'inégalité qu'on a montré juste avant}
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, on remarque alors, qu'en renommant les indices ($p = j$ et $\ell = k$) puis en échangeant l'ordre des sommes, on a :

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n} M_{jk}y_k = \sum_{p=i}^{n}\sum_{\ell=i}^{n} M_{p\ell}y_\ell = \sum_{\ell=i}^{n}\sum_{p=i}^{n} M_{p\ell}y_\ell$$

De plus on peut aussi dans la première somme renommer les indices $p = k$ et $\ell = j$ et cette somme devient

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj}y_j = \sum_{\ell=i}^{n}\sum_{p=1}^{i-1} M_{p\ell}y_\ell.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1} M_{kj}y_j + \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=i}^{n} M_{jk}y_k &= \sum_{\ell=i}^{n}\sum_{p=1}^{i-1} M_{p\ell}y_\ell + \sum_{\ell=i}^{n}\sum_{p=i}^{n} M_{p\ell}y_\ell \\ &= \sum_{\ell=i}^{n} \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{n} M_{p\ell}\right)}_{=1} y_\ell \\ &= \sum_{\ell=i}^{n} y_\ell = \sum_{j=i}^{n} y_j\end{aligned}$$

On a bien obtenu le résultat demandé :

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk}y_k \leqslant \sum_{j=i}^{n} y_j \qquad (*)$$

Pour la dernière inégalité reprenons les calculs du cas symétrique. On peut repartir de :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_i)^2 M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

On cherche donc à montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} y_j x_j$.

On va se servir de la question 1.2 en écrivant :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j M_{ij}}_{c_i}\right) \underbrace{x_i}_{b_i}.$$

Afin de « libérer » la lettre j, on peut remarquer que $c_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_{ik}y_k$.

Grâce à la question 1.2.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j x_i M_{ij} = x_1 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk}y_k + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk}y_k$$

On a déjà vu que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk}y_k = \sum_{j=1}^{n} y_j$.

De plus, d'après $(*)$:

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}y_k \leqslant \sum_{j=i}^{n}y_j$$

Comme $x_i - x_{i-1} \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}y_jx_iM_{ij} &= x_1\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}y_k + \sum_{i=2}^{n}(x_i - x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}y_k \\ &\leqslant \underbrace{x_1\sum_{j=1}^{n}y_j + \sum_{i=2}^{n}(x_i - x_{i-1})\sum_{j=i}^{n}y_j}_{=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}\end{aligned}$$

toujours d'après 1.2.

On a donc obtenu que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_i)^2M_{ij} \geqslant \sum_{j=1}^{n}y_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + \sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2.$$

1.7.2. On a montré dans la question précédente que pour toute matrice bistochastique M,

$$C(M) \geqslant C(I_n).$$

Donc la matrice identité rend bien minimale la quantité $C(M)$ parmi les matrice bistochastique. (I_n fait bien partie de cette catégorie).

1.7.3. On suppose donc dans cette question que les x_i et y_i sont rangés dans un ordre strictement croissant et on veut montrer que dans l'inégalité $C(M) \geqslant C(I_n)$ on a égalité si, et seulement si, $M = I_n$.
L'idée ici est de remonter les calculs de la question 1.7.1 pour voir ce que signifie le cas d'égalité.
Comme dans cette question on a $x_i - x_{i-1} > 0$ (et non plus $\geqslant$) on ne peut avoir égalité dans l'inégalité finale de la question 1.7.1 que si l'inégalité $(*)$ est une égalité.

Or, lors de la démonstration de l'inégalité $(*)$, la seule inégalité utilisée est $\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{jk}y_k \leqslant \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{kj}y_j$.

On ne peut donc avoir égalité dans $(*)$ que si cette inégalité est une égalité.

Notons $\Delta_i = \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{jk}y_k - \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{kj}y_j$.

On souhaite donc savoir à quelle condition sur M, $\Delta_i = 0$ pour tout $i \geqslant 2$. On peut, pour faciliter les calculs, poser $\Delta_1 = 0$.

Idée : simplifier au maximum la différence $\Delta_{i+1} - \Delta_i$ et regarder quand cette différence est nulle.

Pour $i \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=1}^{i}M_{jk}y_k &= \sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{jk}y_k + \sum_{j=i+1}^{n}M_{ji}y_i \\ &= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{jk}y_k - \sum_{k=1}^{i-1}M_{ik}y_k + \sum_{j=i+1}^{n}M_{ji}y_i\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=1}^{i}M_{kj}y_j &= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{kj}y_j - \sum_{k=1}^{i-1}M_{ki}y_i + \sum_{j=i+1}^{n}M_{ij}y_j \\ &= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}M_{kj}y_j - \sum_{j=1}^{i-1}M_{ji}y_i + \sum_{k=i+1}^{n}M_{ik}y_k\end{aligned}$$

dans les deux dernières sommes on change le nom des indices

On soustrait et on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta_{i+1} &= \Delta_i - \sum_{k=1}^{n} M_{ik} y_k + M_{ii} y_i + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} M_{ji} y_i}_{=y_i} - M_{ii} y_i \\ &= \Delta_i - \sum_{k=1}^{n} M_{ik} y_k + y_i\end{aligned}$$

On peut remarquer que cette égalité est encore vraie pour $i = 1$ car :

$$\Delta_2 = \sum_{j=2}^{n} M_{j1} y_1 - \sum_{j=2}^{n} M_{1j} y_j = y_1 - M_{11} y_1 - \sum_{j=2}^{n} M_{1j} y_j = y_1 - \sum_{j=1}^{n} M_{1j} y_j.$$

Ainsi, avec le fait que $\Delta_1 = 0$, on peut en déduire que $\Delta_i = 0$ pour tout i si, et seulement si :

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \qquad y_i - \sum_{k=1}^{n} M_{ik} y_k = 0. \qquad (**)$$

Pour $i = n$, en écrivant $y_n = y_n \sum_{k=1}^{n} M_{nk}$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} M_{nk}(y_n - y_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} M_{nk}(y_n - y_k) = 0$$

Or, pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, $y_n - y_k > 0$ et $M_{nk} \geqslant 0$.
On a donc une somme de termes positifs qui est nulle, donc chaque terme est nul.
Ainsi, pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, $M_{kn} = 0$.
Grâce au propriété des matrices bistochastiques (somme sur une colonne vaut 1) on en déduit que $M_{nn} = 1$ et donc (somme sur une ligne vaut 1 et coeff tous positifs) $M_{nk} = 0$, pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$.
Grâce à cette information, l'égalité $(**)$ devient :

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!], \qquad y_i - \sum_{k=1}^{n-1} M_{ik} y_k = 0.$$

On réitère notre raisonnement avec $i = n - 1$. On obtient que $M_{n-1,n-1} = 1$ et tous les autres termes de la ligne $n - 1$ et de la colonne $n - 1$ sont nuls.
On effectue alors une récurrence descendante et on obtient bien que $M = I_n$.
On a montré que seule la matrice identité réalise l'égalité $C(M) = C(I_n)$ parmi les matrice bistochastiques.

Partie 2 :

Dans toute cette partie nous noterons h une densité de la variable U qui suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1. Exemple

2.1.1. La fonction g étant continue sur le segment $[0; 1]$, elle est bornée. Donc la variable $g(U)$ prend ses valeurs dans un intervalle borné et donc elle admet une variance. D'après le théorème de Kœnig-Huygens on a :

$$V(g(U)) = E\left[(g(U) - E[g(U)])^2\right] = E\left[g(U)^2\right] - (E[g(U)])^2.$$

Or $V(g(U)) \geqslant 0$ donc $E\left[g(U)^2\right] \geqslant (E[g(U)])^2$.

Cas d'égalité :

$$\begin{aligned}
E\left[g(U)^2\right] = (E[g(U)])^2 &\Leftrightarrow E\left[(g(U)-E[g(U)])^2\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (g(U)-E[g(U)])^2 = 0 \\
&\text{car pour une VAR à valeurs } \textbf{positives } E(X)=0 \Leftrightarrow X=0 \\
&\Leftrightarrow g(U) = E[g(U)] \\
&\Leftrightarrow g(U) \text{ est constante} \Leftrightarrow g \text{ est constante}
\end{aligned}$$

2.1.2. Tout d'abord on a $E\left[(S_0(U)-U)^2\right] = E\left[(U+1-U)^2\right] = E(1) = 1$.
De plus, pour tout $S \in \mathscr{S}$, d'après la question 2.1.1. (on prend $g = S - \mathrm{id}$) :

$$E\left[(S(U)-U)^2\right] \geqslant (E[S(U)-U])^2.$$

De plus $E[S(U)-U] = E[S(U)] - E[U] = E[S(U)] - \frac{1}{2}$, et d'après les propriété de l'ensemble $\mathscr{S}$, $S(U)$ admet f pour densité donc :

$$E[S(U)] = \int_1^2 t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t \times 1\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Donc $E[S(U)-U] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ et ainsi $E\left[(S(U)-U)^2\right] \geqslant 1$.
On a donc bien S_0 qui minimise la quantité $E\left[(S(U)-U)^2\right]$.
De plus $E\left[(S(U)-U)^2\right] = 1$ si et seulement si $E\left[(S(U)-U)^2\right] = (E[S(U)-U])^2$ et d'après la question précédente, cela n'est possible que si la fonction $S - \mathrm{id}$ est constante.
Or on a vu que pour $S \in \mathscr{S}$, $E(S(U)-U) = 1$ donc si $S - \mathrm{id}$ =cste alors nécessairement cette constante vaut 1.
Ainsi la seule fonction S rendant minimale la quantité étudiée est la fonction $\mathrm{id}+1$ c'est à dire S_0.

2.2. Remarquons tout d'abord ceci : on suppose que f est une densité de probabilité et on suppose que $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, on a donc nécessairement f qui est nulle en dehors de l'intervalle $[1;2]$.
Pour tout $x \in [1;2]$, par définition d'une variable à densité, $F_V(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f étant supposée continue sur $[1;2]$, on peut affirmer (théorème fondamental de l'analyse) que F_V est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;2]$ et $F_V' = f$. Comme f est supposée strictement positive sur $[1;2]$, on en déduit que F_V est strictement croissante sur $[1;2]$.
La restriction de F_V à $[1;2]$ est donc une fonction continue (et même $\mathscr{C}^1$) et strictement croissante. D'après le théorème de bijection monotone, la restriction de F_V à $[1;2]$ réalise donc une bijection de $[1;2]$ sur $[F_V(1);F_V(2)] = [0;1]$.
Montrons maintenant que la variable aléatoire $F_V^{-1}(U)$ admet f pour densité.
Notons G la fonction de répartition de $F_V^{-1}(U)$. Par définition, $G(x) = P(F_V^{-1}(U) \leqslant x)$.
Comme F_V^{-1} est à valeurs dans $[1;2]$, on a pour $x<1$, $G(x)=0$ et pour $x>2$, $G(x)=1$.
Et pour $x \in [1;2]$, $G(x) = P(U \leqslant F_V(x)) = F_V(x)$ car U suit une loi uniforme sur $[0;1]$.
On a donc $G = F_V$ et donc $F_V^{-1}(U)$ suit la même loi de V, c'est-à-dire admet f pour densité.
Ainsi $F_V^{-1} \in \mathscr{S}$.
Considérons maintenant S une fonction de $\mathscr{S}$ qui soit strictement croissante.
S réalise donc une bijection de $[0;1]$ sur $[S(0);S(1)] = J$.
Montrons que $J = [1;2]$ et que $S = F_V^{-1}$.
Comme $S(U)$ admet f pour densité, on a $P(S(U) \leqslant 1) = 0$ et $P(S(U) \geqslant 2) = 0$. On peut donc affirmer que $S([0;1]) \subset [1;2]$.
De plus, pour tout $v \in [1;2]$, $P(S(U) \leqslant v) > 0$, donc $[S(U) \leqslant v] \neq \emptyset$ et donc il existe $\alpha \in [1;v]$ tel que $\alpha \in S([0;1])$. $S([0;1])$ contient des nombre aussi proches de 1 que l'on veut.

De manière symétrique $S([0;1])$ contient des nombres aussi proches de 2 que l'on souhaite.
Donc $]1;2[\subset S([0;1])$. Et comme $S([0;1])$ est un intervalle fermé et borné car S est continue, on a bien montré que $J = S([0;1]) = [1;2]$.
Soit maintenant $x \in [1;2]$. Comme $S(U)$ a pour densité f, on sait que

$$P(S(U) \leqslant x) = F_V(x).$$

De plus, comme S est bijective sur $[0;1]$, on a aussi

$$P(S(U) \leqslant x) = P(U \leqslant S^{-1}(x)) = S^{-1}(x).$$

Donc, sur $[1;2]$, $F_V = S^{-1}$ c'est-à-dire $S = F_V^{-1}$ sur $[0;1]$.
F_V^{-1} est l'unique fonction de $\mathscr{S}$ qui soit strictement croissante sur $[0;1]$.

2.3. Dans cette question $s(u) = \displaystyle\int_u^1 S(x)\,\mathrm{d}x$.

2.3.1. On pose, pour tout $u \in [0;1]$:

$$\begin{array}{ll} \alpha(u) = s(u) & \alpha'(u) = -S(u) \\ \beta'(u) = 1 & \beta(u) = u \end{array}$$

Les fonction α et β sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^1 s(u)\,\mathrm{d}u = [us(u)]_0^1 + \int_0^1 uS(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 uS(u)\,\mathrm{d}u,$$

car $s(1) = 0$.

2.3.2. Soit $u \in [0;1]$ fixé. Supposons que $x \geqslant u$. Alors on a

$$\int_0^2 1_A(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{S(x)} 1\,\mathrm{d}y = S(x).$$

Si $x < u$ alors

$$\int_0^2 1_A(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_0^2 1_A(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x &= \int_0^u \left[\int_0^2 1_A(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + \int_u^1 \left[\int_0^2 1_A(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^u 0\,\mathrm{d}x + \int_u^1 S(x)\,\mathrm{d}x = s(u) \end{aligned}$$

On a donc montré que $s(u) = \displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^2 1_A(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$.
On utilise alors le théorème de Fubini admis avec $g(x,y) = x - u$ et $h(x,y) = S(x) - y$ qui sont bien des fonctions continues.
On a donc $s(u) = \displaystyle\int_0^2 \left[\int_0^1 1_A(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

2.3.3. Si $y \in [0;1[$ alors les événements $[S(U) \geqslant y]$ et $[F_V^{-1}(U) \geqslant y]$ sont certains donc les deux probabilités données sont égales à $P(U \geqslant u)$ et donc l'inégalité demandée est en fait une égalité.
Si $y \in [1;2]$, comme la fonction F_V est bijective et strictement croissante sur $[1;2]$, on a

$$P\left[U \geqslant u, F_V^{-1}(U) \geqslant y\right] = P\left[U \geqslant u, U \geqslant F_V(y)\right] = \begin{cases} 1-u & \text{si } u \geqslant F_V(y) \\ 1 - F_V(y) & \text{si } u < F_V(y) \end{cases}.$$

Or on peut remarquer que

$$[U \geqslant u, S(U) \geqslant y] \subset [U \geqslant u] \qquad \text{et} \qquad [U \geqslant u, S(U) \geqslant y] \subset [S(U) \geqslant y].$$

Donc

$$P\left[U \geqslant u, S(U) \geqslant y\right] \leqslant 1-u \qquad \text{et} \qquad P\left[U \geqslant u, S(U) \geqslant y\right] \leqslant 1 - F_V(y).$$

Ainsi, dans tous les cas, $P\left[U \geqslant u, S(U) \geqslant y\right] \leqslant P\left[U \geqslant u, F_V^{-1}(U) \geqslant y\right]$.

2.4. *Afin d'exploiter la question précédente il faudrait utiliser une formule hors-programme qui indique comment calculer la probabilité d'une intersection d'événements faisant intervenir des variables à densités à l'aide d'intégrales doubles. Nous allons contourner ce problème.*

Pour tout $S \in \mathscr{S}$:
$$E[(S(U)-U)^2] = E[S(U)^2] - 2E[US(U)] + E[U^2].$$
Comme $S(U)$ et $F_V^{-1}(U)$ ont la même densité f, elle suivent la même loi et donc $E[S(U)^2] = E[F_V^{-1}(U)^2]$.
Montrons maintenant que $E[US(U)] \leqslant E[UF_V^{-1}(U)]$.
Par théorème de transfert on a
$$E[US(U)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xS(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xS(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad E[UF_V^{-1}(U)] = \int_0^1 xF_V^{-1}(x)\,\mathrm{d}x.$$
On rappelle que $s(u) = \displaystyle\int_u^1 S(x)\,\mathrm{d}x$ et on pose $s_0(u) = \displaystyle\int_u^1 F_V^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.
D'après la question 2.3.1 on a donc $E[US(U)] = \displaystyle\int_0^1 s(u)\,\mathrm{d}u$ et $E[UF_V^{-1}(U)] = \displaystyle\int_0^1 s_0(u)\,\mathrm{d}u$.
Montrons donc que pour tout $u \in [0;1]$, $s(u) \leqslant s_0(u)$.
Pour cela on utilise la question 2.3.2 :
$$s(u) = \int_0^2 \left[\int_0^1 1_A(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$
$$s_0(u) = \int_0^2 \left[\int_0^1 1_B(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y,$$
avec $A = \{(x,y) \in [0;1]\times[0;2]; x \geqslant u \text{ et } S(x) \geqslant y\}$ et $B = \{(x,y) \in [0;1]\times[0;2]; x \geqslant u \text{ et } F_V^{-1}(x) \geqslant y\}$.
On remarque que $B = \{(x,y) \in [0;1]\times[0;2]; x \geqslant u \text{ et } x \geqslant F_V(y)\}$.
Donc :

— Si $F_V(y) \geqslant u$, $\displaystyle\int_0^1 1_B(x,y)\,\mathrm{d}x = 1 - F_V(y)$;

— si $F_V(y) < u$, $\displaystyle\int_0^1 1_B(x,y)\,\mathrm{d}x = 1 - u$.

On peut alors remarquer que $A \subset \{(x,y) \in [0;1]\times[0;2]; x \geqslant u\}$ donc
$$\int_0^1 1_A(x,y)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1_{\{(x,y)\in[0;1]\times[0;2];x\geqslant u\}}\,\mathrm{d}x = P(U \geqslant u) = 1-u,$$
et de même $A \subset \{(x,y) \in [0;1]\times[0;2]; S(x) \geqslant y\}$ donc
$$\int_0^1 1_A(x,y)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1_{\{(x,y)\in[0;1]\times[0;2];S(x)\geqslant y\}}\,\mathrm{d}x = P(S(U) \geqslant y) = 1 - F_V(y).$$
Donc dans tous les cas $\displaystyle\int_0^1 1_A(x,y)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1_B(x,y)\,\mathrm{d}x$. (*on a ici redémontrer la question 2.3.3, ce qu'on aurait pu éviter avec le fameux résultat hors-programme dont je parlais avant...*)
En intégrant pour $y \in [0;2]$, on obtient $s(u) \leqslant s_0(u)$.
Et ainsi, $E[US(U)] \leqslant E[UF_V^{-1}(U)]$ et donc, pour finir $E[(S(U)-U)^2] \geqslant E[(F_V^{-1}(U)-U)^2]$, c'est-à-dire F_V^{-1} rend minimale la quantité $E[(S(U)-U)^2]$.
On retrouve bien le résultat que la question 2.1 car si f est constante égale à 1 alors $F_V(x) = x-1$ sur $[1;2]$ et donc $F_V^{-1}(x) = x+1 = S_0(x)$.