ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

ÉCOLE DES MINES DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2023

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Lyon, Paris, Paris-Saclay, à l'ENPC et aux Mines Paris

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

* * *

Début de l'épreuve

L'épreuve est composée d'une introduction et de quatre parties. Les trois premières parties sont essentiellement indépendantes, les rares résultats à réutiliser d'une partie à l'autre sont explicitement donnés et peuvent être admis. Dans chaque partie, on pourra admettre le résultat d'une question pour continuer le sujet.

Il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

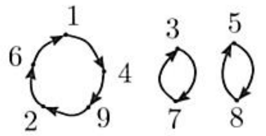
Dans ce sujet, on note $[\![m, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre m (inclus) et n (inclus).

Introduction

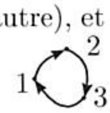
Des amis se réunissent et apportent chacun une surprise à offrir à quelqu'un d'autre. On souhaite répartir ces cadeaux aléatoirement, de telle sorte que chaque personne en reçoive exactement un, et qui ne soit pas celui qu'elle a amené.

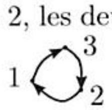
On numérote les personnes de 1 à n, et on peut représenter une telle répartition en plaçant des points (numérotés de 1 à n) reliés par des flèches, une flèche de i à j signifiant que la personne numéro i prend le cadeau amené par la personne numéro j. On peut également associer à une telle répartition la permutation σ (une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$) telle que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, la personne numéro i prend le cadeau amené par la personne numéro $\sigma(i)$.

Voici par exemple la représentation d'une répartition pour 9 personnes, et la permutation associée.



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma(i)$	4	6	7	9	8	1	3	5	2

Une telle permutation, vérifiant que $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est appelé un dérangement de $[\![1, n]\!]$. On note d_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$. On a par exemple $d_1 = 0$ (pas de possibilité), $d_2 = 1$ (la seule possibilité étant que chacun offre son cadeau à l'autre), et $d_3 = 2$, les deux seules répartitions pour $n = 3$ correspondant aux représentations suivantes : 

et 

.

a. Déterminer d_4 en donnant les représentations de toutes les répartitions possibles lorsque $n = 4$.

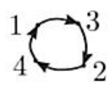
On souhaite maintenant effectuer une répartition aléatoirement. On considère la procédure suivante, en $n - 1$ étapes successives (lorsque $n \geqslant 3$) :

- À l'étape i, pour $i \in [\![1, n-2]\!]$, la personne numérotée i choisit uniformément au hasard un cadeau parmi les cadeaux non-attribués, qui ne soit pas celui qu'elle a amené (chaque cadeau possible est donc choisi avec probabilité $\frac{1}{n-i+1}$ ou $\frac{1}{n-i}$ suivant si le cadeau amené par la personne i est déjà attribué ou non).
- Les deux dernières personnes, numérotées $n - 1$ et n, regardent les deux cadeaux restants.
  - Si un des deux cadeaux est celui amené par une de ces deux personnes, alors la seule possibilité est que l'autre le prenne, et que la personne l'ayant amené prenne l'autre.
  - S'ils ne sont amenés par aucune des deux personnes, la personne $n - 1$ en choisit un au hasard (avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacun), et laisse l'autre à la personne n.

Ainsi, dans tous les cas, chaque personne obtient un cadeau amené par une autre personne. On a donc une procédure qui est un tirage aléatoire d'un dérangement de $[\![1, n]\!]$.

b. Lorsque $n = 4$, calculer la probabilité d'obtenir le dérangement σ donné par la table de valeurs (et sa représentation) ci-contre, et en déduire que cette procédure n'est pas un tirage aléatoire uniforme parmi tous les dérangements de $[\![1, 4]\!]$.

i	1	2	3	4
$\sigma(i)$	3	4	2	1



L'objectif de ce sujet est d'étudier la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que des procédures de tirage aléatoire et uniforme de dérangements de $[\![1, n]\!]$.

Partie I

1. On se fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on définit le polynôme P_n et la fonction réelle f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad f_n(x) = e^x \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

1.a. Montrer que $P_n + f_n$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène, et la résoudre.

1.b. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in [-1,1]$, on ait $|f_n(x)| \leqslant C|x|^{n+1}$.

1.c. On se fixe un polynôme Q donné par $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ pour un entier $N \geqslant n$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in [-1,1]$, on ait $|Q(x)| \leqslant C|x|^{n+1}$. Montrer que tous les coefficients a_k pour $k \in [\![0,n]\!]$ sont nuls. On pourra raisonner par l'absurde, noter k_0 le plus petit indice k tel que $a_k \neq 0$ et calculer la limite en 0 de $\frac{Q(x)}{x^{k_0}}$.

1.d. En exprimant $P_n(x)$ et $P_n(-x)$ grâce à la question **1.a.** et en utilisant les questions **1.b.** et **1.c.**, montrer qu'il existe un polynôme R_n tel que $P_n(x)P_n(-x) = 1 + x^{n+1}R_n(x)$.

2. On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ (les bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$). Si σ est une permutation, on dit que $i \in [\![1,n]\!]$ est un point fixe de σ si $\sigma(i) = i$.

On note $S_{0,n} \subset S_n$ l'ensemble des dérangements, c'est-à-dire des permutations σ sans point fixe ($\forall i \in [\![1,n]\!], \sigma(i) \neq i$). On note donc d_n le cardinal de $S_{0,n}$. On pose également $d_0 = 1$.

Si E est un ensemble à k éléments, quitte à numéroter ses éléments de 1 à k, une permutation de E (une bijection de E dans E) sans point fixe peut se ramener à une permutation de $S_{0,k}$. Le nombre de permutations de E sans point fixe est donc aussi d_k.

Enfin, pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $p_{k,n}$ la probabilité qu'une permutation tirée uniformément au hasard dans S_n ait exactement k points fixes (on pose également $p_{0,0} = 1$).

2.a. Quel est le cardinal de S_n ? En déduire que $p_{0,n} = \dfrac{d_n}{n!}$.

2.b. Soit $k \in [\![0,n]\!]$ et $\mathcal{I}$ une partie de $[\![1,n]\!]$ à k éléments. On note $T_{\mathcal{I}} \subset S_n$ l'ensemble des permutations ayant pour points fixes les éléments de $\mathcal{I}$ (et seulement ceux-ci). Quel est le cardinal de $T_{\mathcal{I}}$?

2.c. En déduire que $p_{k,n} = \frac{1}{k!}p_{0,n-k}$ (on pourra traiter à part le cas $k = n$), et que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = 1.$$

3. On définit le polynôme D_n par $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} d_k \frac{x^k}{k!}$.

3.a. On pose $G_n(x) = P_n(x)D_n(x)$. Montrer en utilisant la question précédente que tous les coefficients de degré k de G_n valent 1 lorsque $k \in [\![0,n]\!]$ et appartiennent à $[0,1]$ pour $k > n$.

3.b. En multipliant $G_n(x)$ par $P_n(-x)$, et en utilisant la question **1.d.**, en déduire que l'on a

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3.c. On fixe $x \in]-1,1[$. Calculer la limite de $G_n(x)$ lorsque $n \to \infty$, et en déduire la limite de $D_n(x)$ lorsque $n \to \infty$. Cette limite est appelée fonction génératrice exponentielle de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On note X_n le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire tirée uniformément dans S_n.

4.a. En utilisant la question **2.c.**, exprimer $p_{k-1,n-1}$ en fonction de $p_{k,n}$ lorsque $k \geqslant 1$. En déduire l'espérance de la variable aléatoire X_n, lorsque $n \geqslant 1$.

4.b. Calculer de la même manière $\mathbb{E}[X_n(X_n-1)]$ lorsque $n \geqslant 2$ et en déduire la variance de X_n.

5. On étudie dans cette question les limites des probabilités $p_{k,n}$ obtenues précédemment.

5.a. Montrer que la suite $(p_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, notée p_0, et donner sa valeur.

5.b. On fixe $k \in \mathbb{N}$. Calculer la limite de $p_{k,n}$, notée p_k, lorsque $n \to \infty$. Montrer que $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k = 1$.

5.c. Quel est le nom de la loi d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$? Donner son espérance et sa variance.

PARTIE II

Dans cette partie, on étudie des algorithmes de simulations de tirages aléatoires de permutations. On dispose d'une fonction `Unif` qui, en prenant pour argument un entier n, renvoie un entier choisi uniformément au hasard dans $[\![1, n]\!]$.

Dans les algorithmes qui suivent, on notera := pour l'assignation de valeur, et = pour le test d'égalité. Et si liste est une variable correspondant à une liste, on note liste$[i]$ son i-ème élément (pour i allant de 1 à la taille de la liste). On représentera une permutation de S_n par une liste de n entiers distincts deux à deux (on utilise la notation $[\ell_1, \dots, \ell_k]$ pour désigner une liste à k éléments). On note enfin id_n la permutation identité, correspondant à la liste $[1, 2, \dots, n]$.

1. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on veut montrer que l'algorithme suivant renvoie une permutation tirée uniformément au hasard dans S_n (l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$).

Algorithme 1 : Permutation aléatoire

Entrées : $n \in \mathbb{N}^*$
Sorties : $\sigma \in S_n$
1 **Fonction** `PermAlea`(n)
2 $\quad \sigma := \mathrm{id}_n$
3 $\quad$ **pour** *i de 2 à n* **faire**
4 $\quad\quad j :=$ `Unif`(i)
5 $\quad\quad (\sigma[i], \sigma[j]) := (\sigma[j], \sigma[i])$
6 $\quad$ **retourner** σ

Pour des entiers $(j_2, \dots, j_n) \in [\![1, 2]\!] \times [\![1, 3]\!] \times \dots \times [\![1, n]\!]$, on note $\Phi(j_2, \dots, j_n)$ la liste σ obtenue à la sortie de l'algorithme 1 lorsque les valeurs de j tirées successivement à la ligne **4** sont $j_2, \dots, j_n$. À chaque passage dans la boucle, à la ligne **5**, deux valeurs de la liste σ sont échangées, on a donc bien toujours dans la liste une et une seule fois chaque entier de 1 à n, de sorte que σ peut toujours être vue comme une permutation de $[\![1, n]\!]$.

1.a. Montrer qu'à chaque passage dans la boucle, juste avant l'échange de valeurs de la ligne **5**, la valeur de $\sigma[k]$ vaut k pour tout k dans $[\![i, n]\!]$. On fixe $(j_2, \dots, j_n) \in [\![1, 2]\!] \times [\![1, 3]\!] \times \dots \times [\![1, n]\!]$ et on pose $\varphi = \Phi(j_2, \dots, j_n) \in S_n$, que vaut $\varphi(j_n)$? En déduire que l'on peut déterminer j_n à partir de φ.

1.b. On note de plus $\widetilde{\varphi}$ la permutation correspondant à la liste σ juste avant le dernier échange de valeurs de la ligne **5**, lorsque i vaut n et que les valeurs de j tirées successivement à la ligne **4** sont $j_2, \dots, j_n$. Montrer que l'on peut déterminer $\widetilde{\varphi}$ à partir de φ et j_n, et en déduire que l'on peut déterminer j_{n-1} à partir de φ.

1.c. On admet que l'on peut obtenir par récurrence que si l'on connaît $\varphi = \Phi(j_2, \dots, j_n)$, alors on peut déterminer toutes les valeurs $j_2, \dots, j_n$. Montrer que l'application $\Phi : [\![1, 2]\!] \times [\![1, 3]\!] \times \dots \times [\![1, n]\!] \to S_n$ est injective, puis bijective.

1.d. On effectue un appel de `PermAlea`(n). On considère $n - 1$ variables aléatoires $J_2, J_3, \dots, J_n$ correspondant aux valeurs de j tirées successivement par l'algorithme à la ligne **4**. On suppose donc que ce sont des variables aléatoires indépendantes, et telles que pour tout k dans $[\![2, n]\!]$, la loi de J_k est la loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$. Si $\varphi \in S_n$, calculer la probabilité que $\Phi(J_2, \dots, J_n)$ soit égale à φ, et en déduire que l'algorithme renvoie une permutation tirée uniformément au hasard dans S_n, en utilisant $n - 1$ appels à la fonction `Unif`.

2. On considère l'algorithme suivant, qui tire une permutation aléatoire et recommence tant qu'elle n'est pas sans point fixe. On rappelle qu'on a noté $S_{0,n}$ l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$ (les permutations $\sigma \in S_n$ telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i) \neq i$), qu'on a noté $p_{0,n}$ la probabilité qu'une permutation tirée aléatoirement et uniformément dans S_n soit un dérangement, et qu'on a montré dans la partie I que $(p_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite notée $p_0 > 0$ lorsque $n \to \infty$.

Algorithme 2 : Méthode de rejet

```
Entrées : n ∈ ℕ*
Sorties : σ ∈ S_n
Fonction PermAleaRejet(n)
    σ := PermAlea(n)
    tant que σ ∉ S_{0,n} faire
        σ := PermAlea(n)
    retourner σ
```

On effectue un appel de la fonction `PermAleaRejet` pour un entier n donné, et on note $Z_n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire correspondant au nombre d'appels de la fonction `PermAlea` (une fois avant la boucle, et éventuellement à l'intérieur de cette boucle), si la boucle s'arrête en un nombre fini d'étapes. Et on note $Z_n = \infty$ si la boucle ne s'arrête jamais.

2.a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Z_n \geqslant k)$ en fonction de $p_{0,n}$. En déduire que $\mathbb{P}(Z_n = \infty) = 0$ et donner le nom de la loi de Z_n et son espérance.

2.b. Si l'on note u_n le nombre moyen d'appels à la fonction `Unif` lors de cet appel de la fonction `PermAleaRejet`(n), montrer que l'on a $u_n \sim \frac{n}{p_0}$ lorsque $n \to \infty$.

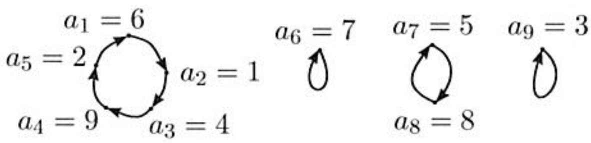
2.c. On se fixe $\varphi \in S_{0,n}$ une permutation sans point fixe. Calculer la probabilité qu'une permutation renvoyée lors de l'appel de `PermAleaRejet(n)` soit égale à φ. En déduire que cet algorithme simule un tirage aléatoire uniforme dans $S_{0,n}$.

Partie III

Dans cette partie, on cherche à obtenir un nouvel algorithme de simulation de permutations aléatoires en étudiant les cycles associés à une permutation. Comme dans l'introduction, on représente une permutation σ sous la forme de cycles : on choisit un nombre $a_1 \in [\![1, n]\!]$, et on place un premier point correspondant à a_1. On relie ce point avec une flèche dirigée vers un point correspondant à $a_2 = \sigma(a_1)$, que l'on relie à un point correspondant à $a_3 = \sigma(a_2) = \sigma(\sigma(a_1))$ et ainsi de suite avec les images successives de a_1 jusqu'à arriver sur un point a_ℓ tel que $\sigma(a_\ell) = a_1$. On appelle $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ un cycle de la permutation σ, et ℓ est appelé la longueur du cycle (dans le cas où $\sigma(a_1) = a_1$, on a donc $\ell = 1$, on ne place pas de nouveau point, on relie simplement ce point à lui-même). Puis on choisit un nouveau point correspondant à un entier $a_{\ell+1}$ que l'on n'a pas encore traité, et on fait de même.

On a représenté sur l'exemple suivant une permutation σ de S_9 qui a 4 cycles (contrairement à l'introduction, il peut ici y avoir des cycles de longueur 1 qui correspondent aux points fixes de la permutation), et indiqué les nombres a_i utilisés :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma(i)$	4	6	3	9	8	1	7	5	2



On a donc commencé avec $a_1 = 6$ dont le cycle est de longueur 5, puis $a_6 = 7$ (cycle de longueur 1), puis $a_7 = 5$ (longueur 2) et enfin $a_9 = 3$. On va montrer que l'on peut s'inspirer de ceci pour générer aléatoirement une permutation dont la loi est encore la loi uniforme sur S_n, en choisissant uniformément au hasard les nombres a_i, et en choisissant la bonne manière de tirer au hasard les différentes longueurs de cycles.

1. On cherche a étudier les longueurs des cycles d'une permutation σ tirée uniformément dans S_n. Si $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ sont des éléments de $[\![1, n]\!]$ distincts deux à deux, on note $C_{a_1, a_2, \ldots, a_\ell}$ l'événement correspondant au fait que $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ est un cycle de σ : $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, \ell - 1]\!]$, et $\sigma(a_\ell) = a_1$.

1.a. On fixe $a_1 \in [\![1, n]\!]$ et $\ell \in [\![2, n]\!]$. Si $(a_2, \ldots, a_\ell)$ sont des éléments de $[\![1, n]\!]$ distincts deux à deux, et distincts de a_1, combien y a-t-il de permutations σ dans S_n telles que l'événement $C_{a_1, a_2, \ldots, a_\ell}$ soit réalisé ?

1.b. On fixe $a_1 \in [\![1, n]\!]$ et $\ell \in [\![2, n]\!]$. Si σ est une permutation tirée uniformément dans S_n, on note L_1 la longueur du cycle de σ contenant a_1. Montrer que $\mathbb{P}(L_1 = \ell) = \frac{1}{n}$, et montrer que ce résultat est vrai également pour $\ell = 1$.

1.c. On se donne $\ell \in [\![1, n-1]\!]$ et on fixe maintenant $(a_1, \ldots, a_{\ell+1})$ des éléments de $[\![1, n]\!]$ distincts deux à deux. On note L_2 la longueur du cycle de σ contenant $a_{\ell+1}$, et on fixe $\widetilde{\ell} \in [\![1, n - \ell]\!]$. Montrer que $\mathbb{P}(L_2 = \widetilde{\ell} | C_{a_1, \ldots, a_\ell}) = \frac{1}{n-\ell}$.

On admet pour les questions suivantes que si l'on tire les entiers a_i uniformément au hasard (c'est-à-dire que l'on choisit une permutation α uniformément dans S_n, avec $a_i = \alpha(i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$), et que l'on tire L_1 uniformément dans $[\![1, n]\!]$, puis L_2 uniformément dans $[\![1, n - L_1]\!]$ (si $L_1 < n$), puis L_3 uniformément dans $[\![1, n - L_1 - L_2]\!]$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir $L_1 + L_2 + \cdots + L_k = n$, alors la permutation σ obtenue en formant les cycles de taille $L_1, L_2, \ldots, L_k$, avec les entiers $(a_1, \ldots, a_{L_1})$, puis $(a_{L_1+1}, \ldots, a_{L_1+L_2})$, et ainsi de suite, est également une permutation tirée uniformément dans S_n.

2. On dispose comme dans la partie II d'une fonction `Unif` qui, en prenant pour argument un entier n, renvoie un entier choisi uniformément au hasard dans $[\![1, n]\!]$. On considère l'algorithme suivant, qui génère récursivement une liste de longueurs de cycles comme indiqué ci-dessus : on tire d'abord la longueur L_1 uniformément dans $[\![1, n]\!]$, puis on utilise le même algorithme avec l'argument $n - L_1$ pour générer la liste $[L_2, \ldots, L_k]$, et on renvoie la liste $[L_1, \ldots, L_k]$.

Algorithme 3 : Génération aléatoire d'une liste de longueurs de cycles

Entrées : $n \in \mathbb{N}^*$
Sorties : listeL : liste d'entiers

1 **Fonction** `LongueursCyclesAlea`(n)
2     $\ell :=$ `Unif`(n)
3   **si** $\ell = n$ **alors**
4   **retourner** $[n]$
5   **sinon**
6   listeL :=`LongueursCyclesAlea`($n - \ell$)
7   Ajouter ℓ au début de listeL
8   **retourner** listeL

L'objet de cette question est d'étudier le nombre d'appels de la fonction `Unif` lorsqu'on utilise cet algorithme, ce qui correspond à la taille de la liste renvoyée. D'après ce qu'on a admis, cela correspond donc au nombre de cycles d'une permutation aléatoire tirée uniformément dans S_n.

Pour cela on note $(U_n)_{n \geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes et telles que pour tout $n \geqslant 1$, la variable U_n suit la loi uniforme dans $[\![1, n]\!]$. Cette variable U_n correspond à la valeur de ℓ renvoyée par la fonction `Unif` à la ligne **2** de l'algorithme 3 lors de l'appel de `LongueursCyclesAlea`(n).

On peut donc définir par récurrence la variable aléatoire Y_n correspondant à la liste renvoyée lorsqu'on effectue un appel à la fonction `LongueursCyclesAlea` avec l'entier n :

$$\begin{cases} Y_n = [n] \Leftrightarrow U_n = n, \\ \text{pour } k > 1, \text{ si } \ell_1 + \cdots + \ell_k = n, \text{ alors } Y_n = [\ell_1, \ldots, \ell_k] \Leftrightarrow U_n = \ell_1 \text{ et } Y_{n-\ell_1} = [\ell_2, \ldots, \ell_k]. \end{cases}$$

Enfin, on note H_n la variable aléatoire donnant le nombre d'éléments de la liste Y_n.

2.a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pour $k \geqslant 1$, montrer que $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$. En déduire que

$$\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln n.$$

2.b. Quelle est la probabilité que $H_n = 1$? La variable Y_k étant définie à partir des $(U_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$, on admet que lorsque $k < n$, alors U_n et Y_k sont indépendantes. Montrer que pour $k > 1$, on a

$$\mathbb{P}(H_n = k) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1)}{n}.$$

2.c. Montrer que l'on a $\mathbb{E}[H_n] = 1 + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{E}[H_{n-\ell}]$. Calculer $\mathbb{E}[H_{n+1}] - \mathbb{E}[H_n]$, et en déduire une expression de $\mathbb{E}[H_n]$, puis montrer que l'on a $\mathbb{E}[H_n] \sim \ln n$ lorsque $n \to \infty$.

On considère maintenant l'algorithme suivant, qui prend en argument une liste de longueurs de cycles, utilise la fonction `PermAlea` de la partie II pour tirer les nombres a_i, et construit la permutation σ en formant des cycles comme indiqué précédemment.

Algorithme 4 : Permutation aléatoire avec longueurs des cycles données

Entrées : listeL : liste d'entiers
Sorties : $\sigma \in S_n$ où n est la somme des entiers dans listeL

Fonction `PermAleaCycles(listeL)`
- Initialiser n : somme des entiers dans listeL
- Initialiser k : nombre d'éléments de listeL
- Initialiser $m := 0$
- Initialiser $\alpha :=$ `PermAlea`(n)
- Initialiser σ : liste de n entiers
- **pour** *j de 1 à k* **faire**
  - **pour** *i de $m+1$ à $m +$ listeL$[j] - 1$* **faire**
    - $\sigma[\alpha[i]] := \alpha[i+1]$
  - $\sigma[\alpha[m + \text{listeL}[j]]] := \alpha[m+1]$
  - $m := m + \text{listeL}[j]$
- **retourner** σ

D'après ce que l'on a admis, on obtient que l'appel de `PermAleaCycles(LongueursCyclesAlea(`n`))` fournit donc une permutation aléatoire tirée uniformément dans S_n. En terme de coût ce n'est pas plus intéressant que d'utiliser directement l'algorithme de la partie II, mais l'objet de la question suivante est d'en voir l'utilité pour tirer une permutation sans point fixe.

3. On observe qu'une permutation renvoyée par `PermAleaCycles(LongueursCyclesAlea(`n`))` n'a pas de point fixe si et seulement si la liste renvoyée par `LongueursCyclesAlea(`n`)` n'a pas d'élément égal à 1. On considère donc la méthode de rejet suivante pour construire une liste de longueurs de cycles sans élément égal à 1 (on répète l'algorithme 3 jusqu'à obtenir une telle liste) :

Algorithme 5 : Méthode de rejet basée sur les cycles

Entrées : $n \in \mathbb{N}^*$
Sorties : $\sigma \in S_n$

Fonction `LongueursCyclesAleaRejet(`n`)`
- listeL :=`LongueursCyclesAlea(`n`)`
- **tant que** listeL *a au moins un élément égal à* 1 **faire**
  - listeL :=`LongueursCyclesAlea(`n`)`
- **retourner** listeL

Tournez la page S.V.P.

3.a. Comme dans la question **2.**, on note H_n une variable aléatoire donnant la taille de la liste renvoyée par l'algorithme 3 lorsqu'on appelle `LongueursCyclesAlea(`n`)`, et on définit l'événement F_n : « au moins un élément de cette liste est égal à un ». On note F_n^c son complémentaire.

On note enfin T_n une variable aléatoire donnant le nombre d'appels à la fonction `Unif` lorsqu'on effectue l'appel de la fonction `LongueursCyclesAleaRejet(`n`)` donnée par l'algorithme 5 (éventuellement $T_n = \infty$ si la boucle ne s'arrête pas). Pour $t \geqslant 1$, montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(T_n = t) = \mathbb{P}((H_n = t) \cap F_n) + \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}((H_n = s) \cap F_n^c)\mathbb{P}(T_n = t - s).$$

3.b. Montrer que $\mathbb{E}(T_n) < \infty$, et en déduire que $\mathbb{E}(T_n) = \frac{h_n}{1-p_{0,n}}$ (on rappelle qu'on a noté $p_{0,n}$ la probabilité qu'une permutation tirée uniformément dans S_n n'ait pas de point fixe).

3.c. Montrer que l'appel de `PermAleaCycles(LongueursCyclesAleaRejet(`n`))` simule une permutation aléatoire tirée uniformément dans $S_{0,n}$. Si on note v_n le nombre moyen d'appels de la fonction `Unif` lors de cet appel, montrer que l'on a $v_n \sim n$ lorsque $n \to \infty$ (on rappelle qu'on a montré dans la partie I que $(p_{0,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite $p_0 > 0$ lorsque $n \to \infty$).

Partie IV

a. Commenter les résultats des parties II et III.

b. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k \geqslant \int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x$ et calculer cette intégrale.

c. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\frac{n^{(1-\varepsilon)n}}{n!} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, et montrer en particulier que dès que n est assez grand $n^{(1-\varepsilon)n} < d_n$. Peut-on espérer obtenir un algorithme meilleur que celui de la partie III, en terme de nombre d'évaluations de la fonction `Unif` (si on suppose qu'elle peut seulement être exécutée sur des ensembles de cardinal inférieur à n) ?

Fin du sujet