

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Cachan, Lyon, Paris et de l'ENPC

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

★ ★ ★

L'examen est composé de cinq parties. Chaque partie peut se traiter de manière indépendante en admettant les résultats principaux des parties précédentes. Pour les parties 3 et 4, les résultats principaux sont énoncés en début de partie.

Dans ce qui suit, on utilisera les notations suivantes.

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, \bar{z} est le complexe conjugué de z . $|z|$ est le module de z , c'est à dire $|z|^2 = z\bar{z}$. $\Re(z)$ est la partie réelle de z , $\Im(z)$ sa partie imaginaire.
- $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles de dimension n par n .
- $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^t A$ est la transposée de A .
- $G_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{R})$.
- On identifiera \mathbb{R}^n avec l'espace vectoriel composé des vecteurs colonnes réels de taille n . On identifiera \mathbb{C}^n avec l'ensemble des vecteurs colonnes complexes de taille n .
- Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{Spec}(A)$ est le spectre de A , c'est à dire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $v \in \mathbb{C}^n$ non nul satisfaisant $Av = \lambda v$.

1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES 1 : MATRICES STRICTEMENT POSITIVES

On dit qu'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est strictement positive si et seulement si tous ses coefficients sont strictement positifs.

(1.1) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z_1|^2|z_2|^2 = \Re(z_1\bar{z}_2)^2 + \Im(z_1\bar{z}_2)^2$.

(1.2) En déduire que $\Re(|z_1||z_2| - z_1\bar{z}_2) \geq 0$, et que $\Re(|z_1||z_2| - z_1\bar{z}_2) = 0$ si et seulement si $|z_1||z_2| = z_1\bar{z}_2$.

(1.3) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive. Soit $v \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij}(|v_i||v_j| - v_i\bar{v}_j) = 0,$$

où v_i est la i -ème composante de v . Montrer que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a $|v_i||v_j| = v_i\bar{v}_j$.

Pour deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$, on écrira $u < v$ si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, u_i < v_i$$

où u_i est la i -ème composante de u , et v_i est la i -ème composante de v . De même, on écrira $u \leq v$ si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, u_i \leq v_i.$$

Enfin, si $u_i > 0$ (respectivement $u_i \geq 0$) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on écrira $u > 0$ (respectivement $u \geq 0$).

- (1.4) Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs distincts tels que $u \leq v$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive. Montrer que $Au < Av$.
- (1.5) En déduire l'existence d'un réel $\epsilon > 0$, tel que $(1 + \epsilon)Au \leq Av$.

2. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES 2 : ALGÈBRE LINÉAIRE

On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est une loi de probabilité si et seulement si $v \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n v_i = 1$.

- (2.1) Montrer que si $v, v' \in \mathbb{R}^n$ sont deux lois de probabilité telles que

$$\{mv : m \in \mathbb{R}\} = \{mv' : m \in \mathbb{R}\},$$

alors $v = v'$.

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit le rayon spectral

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(A)\}$$

et la norme infinie

$$\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |A_{ij}| : i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

- (2.2) Pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, démontrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $|\sum_{j=1}^n A_{ij}v_j| \leq \|A\|_\infty \|v\|_\infty$, où $\|v\|_\infty = \max\{|v_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$.
- (2.3) En déduire que $\|A\|_\infty \geq \rho(A)$.

Dans les parties suivantes, on va utiliser le théorème de Gelfand qui s'énonce de la manière suivante:

Théorème 2.1. *Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|A^N\|_\infty^{1/N}$ existe et est égale à $\rho(A)$.*

Dans cette sous-partie, on montrera ce résultat dans le cas particulier où A est une matrice diagonalisable dans \mathbb{R} , c'est à dire qu'il existe $P \in G_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tel que

$$A = P D P^{-1}.$$

- (2.4) Soient $B, C \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|BC\|_\infty \leq \|B\|_\infty \|C\|_\infty$.
- (2.5) Soient $S \in G_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\begin{aligned} \|S^{-1}MS\|_\infty &\leq \|S\|_\infty \|S^{-1}\|_\infty \|M\|_\infty \\ \|S^{-1}MS\|_\infty &\geq (\|S\|_\infty \|S^{-1}\|_\infty)^{-1} \|M\|_\infty. \end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité, on remarquera que

$$\|S^{-1}MS\|_\infty = \frac{1}{\|S^{-1}\|_\infty \|S\|_\infty} \|S\|_\infty \|S^{-1}MS\|_\infty \|S^{-1}\|_\infty.$$

- (2.6) En déduire le théorème de Gelfand dans le cas particulier où A est diagonalisable dans \mathbb{R} .

Dans ce qui suit, on aura aussi à utiliser le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\rho(A) = \rho({}^tA)$.*

Encore une fois, on se contente de démontrer ce résultat dans le cas particulier où A est diagonalisable dans \mathbb{R} , c'est à dire,

$$A = P D P^{-1}.$$

où P et D sont définis comme dans les questions précédentes.

- (2.7) En calculant ${}^t(PP^{-1})$, montrer que ${}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$. On rappelle aussi que $\forall B, C \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^t(BC) = {}^tC {}^tB$.
- (2.8) En déduire que

$${}^tA = ({}^tP)^{-1} D {}^tP,$$

et que $\rho(A) = \rho({}^tA)$.

3. LE THÉORÈME DE PERRON FROEBENIUS

Dans cette partie, on admettra la version générale du théorème de Gelfand, i.e., le théorème 2.1 énoncé plus haut. En admettant ce résultat, l'objet de cette section est la démonstration du théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soit A une matrice strictement positive. Il existe une unique loi de probabilité $v \in \mathbb{R}^n$ telle que $Av = \rho(A)v$. De plus, $v > 0$ et*

$$\{w \in \mathbb{C}^n : Aw = \rho(A)w\} = \{mv : m \in \mathbb{C}\}.$$

C'est la première partie du célèbre théorème de Perron-Froebenius.

Pour le restant de cette section, on considère une matrice A strictement positive.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et soit $\phi \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $A\phi = \lambda\phi$.

(3.1) Montrer que $A|\phi| \geq \rho(A)|\phi|$, où pour tout $w \in \mathbb{C}^n$, $|w|$ dénote le vecteur tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |w|_i = |w_i|$$

(on prend la valeur absolue de chaque coordonnée).

On veut maintenant montrer par contradiction que $A|\phi| = \rho(A)|\phi|$. On suppose temporairement que $A|\phi|$ n'est pas égal à $\rho(A)|\phi|$.

(3.2) En utilisant la question (1.5), montrer l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que

$$A^2|\phi| \geq (1 + \epsilon)\rho(A) A|\phi|.$$

(3.3) En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}, A^{N+1}|\phi| \geq (1 + \epsilon)\rho(A) A^N|\phi|.$$

(3.4) Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}, A^{N+1}|\phi| \geq ((1 + \epsilon)\rho(A))^N |\phi|.$$

(3.5) En utilisant le théorème de Gelfand (théorème 2.1 plus haut), en déduire par l'absurde que $|\phi|$ est un vecteur propre de A et que $\rho(A)$ est sa valeur propre associée.

(3.6) Montrer que $|\phi| > 0$.

Dans ce qui suit, on va montrer que $\lambda = \rho(A)$ et qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\phi = c|\phi|$.

(3.7) En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \left| \sum_{j=1}^n A_{ij}\phi_j \right| = \sum_{j=1}^n A_{ij}|\phi_j|.$$

(3.8) Reformuler l'expression

$$\left| \sum_{j=1}^n A_{1,j}|\phi_j| \right|^2 - \left| \sum_{j=1}^n A_{1,j}\phi_j \right|^2,$$

comme une somme double, et en utilisant la question (1.3), en déduire que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |\phi_i||\phi_1| = \phi_i\bar{\phi}_1.$$

(3.9) En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $\phi = c|\phi|$.

(3.10) Montrer que $\lambda = \rho(A)$, et que $\rho(A)$ est l'unique élément dans

$$\{\lambda \in \text{Spec}(A) : |\lambda| = \rho(A)\}.$$

(3.11) Montrer qu'il existe une loi de probabilité $v > 0$ telle que $Av = \rho(A)v$.

On va maintenant montrer par l'absurde que

$$\{w \in \mathbb{C}^n : Aw = \rho(A)w\} = \{mv : m \in \mathbb{C}\}.$$

où v est la loi de probabilité définie dans la question précédente.

(3.12) Soit $v' \in \mathbb{R}^n$ tel que $v' > 0$ et $Av' = \rho(A)v'$. Montrer que l'on peut choisir $\bar{c} \geq 0$ tel que $v - \bar{c}v' \geq 0$ et tel que au moins un des coefficients soit égal à 0.

(3.13) En utilisant une des questions préliminaires, en déduire que $A(v - \bar{c}v') > 0$ si $v \neq \bar{c}v'$.

(3.14) En déduire par l'absurde que

$$\{w \in \mathbb{C}^n : Aw - \rho(A)w = 0\} = \{mv : m \in \mathbb{C}\}.$$

(3.15) En conclure que v est l'unique loi de probabilité telle que $Av = \rho(A)v$.

4. LES MATRICES STOCHASTIQUES

On dit qu'une matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, S_{ij} \geq 0$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n S_{ij} = 1.$$

(4.1) Montrer que si S est stochastique, alors S^k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pourra d'abord montrer que si A et B sont stochastiques, alors leur produit est stochastique.

(4.2) Montrer que si $v \in \mathbb{R}^n$ est une loi de probabilité, alors $({}^tS)^k v$ est aussi une loi de probabilité pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(4.3) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de S et calculer la valeur propre associée.

(4.4) Démontrer que $\rho(S) = 1$. On pourra s'aider de la question (2.3).

(4.5) Si S est strictement positive, déduire l'existence d'une unique loi de probabilité telle que $({}^tS)\pi = \pi$, et que de plus $\pi > 0$.

5. LE MODÈLE DE WRIGHT-FISHER AVEC MUTATION

On considère une urne composée de N boules, avec $X_0 \in \{0, \dots, N\}$ boules noires et $N - X_0$ boules blanches. On effectue N tirages avec remise.

(5.1) Soit X_1 le nombre de boules noires tirées. Sachant que $X_0 = i$, exprimer X_1 comme la somme de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli dont on spécifiera le paramètre.

(5.2) Quelle est la loi de X_1 sachant que $X_0 = i$?

(5.3) Soit $a < b \in \mathbb{R}$. Soit $x \in]0, 1[$ tel que $Nx \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de la probabilité conditionnelle que $\frac{X_1 - Nx}{\sqrt{N}}$ appartienne à $[a, b]$, sachant que $X_0 = Nx$, c'est à dire:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 - Nx}{\sqrt{N}} \in [a, b] \mid X_0 = Nx\right),$$

lorsque N est grand ?

(5.4) On fait l'hypothèse que la composition initiale de l'urne est aléatoire. On représente la loi de X_0 à l'aide d'un vecteur $\pi^0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, tel que $\pi_i^0 = \mathbb{P}(X_0 = i)$ pour $i \in \{0, \dots, N\}$. On remarquera que les coefficients du vecteur sont ici indexés de 0 à N .

Soit π^1 la loi de X_1 (elle aussi représentée par un vecteur de taille $N + 1$ indexé de 0 à N). Montrer que

$$\pi^1 = ({}^tP)\pi^0,$$

où $P_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$ pour $i, j \in \{0, \dots, N\}$.

(5.5) Montrer que P est stochastique et calculer explicitement ses coefficients.

On peut interpréter le modèle précédent comme un modèle de génétique d'une population haploïde composée de N individus. Chaque individu est caractérisé par un type $i \in \{b, n\}$ (blanc ou noir), où b et n représentent les deux allèles possibles en un locus donné du génome.

À temps 0, on suppose que X_0 individus sont porteurs de l'allèle n , alors que $N - X_0$ individus sont porteurs de l'allèle b . À temps 1, les N individus sont remplacés par N nouveaux individus dont le type est choisi de la manière suivante: chaque nouvel individu hérite du type d'un individu de la génération 0 (le parent), cet individu étant choisi uniformément au hasard dans la population à temps 0. X_1 représente alors le nombre de porteurs de l'allèle n au temps 1.

Dans ce modèle, on introduit maintenant un paramètre de mutations $p \in [0, 1]$. Plus précisément, un individu hérite de l'allèle parent avec probabilité $(1 - p)$, et de l'allèle opposé avec probabilité p . On notera que le cas $p = 0$ correspond au modèle d'urne étudié dans les questions précédentes.

(5.6) Reprendre les questions (5.1) et (5.2) avec $p \in [0, 1]$.

(5.7) Déterminer la matrice B telle que

$$\pi^1 = ({}^t B) \pi^0,$$

où π^0 et π^1 sont définis de manière analogue aux questions précédentes.

(5.8) Lorsque $p \in]0, 1[$, montrer qu'il existe une unique loi de probabilité π telle que

$$\pi = ({}^t B)\pi.$$

On dit que π est la loi invariante du modèle. Justifier cette terminologie.

(5.9) Démontrer que

$$\forall i \in \{0, \dots, N\}, \mathbb{E}(X_1 | X_0 = i) = N \left(\frac{i}{N}(1 - p) + \left(1 - \frac{i}{N}\right)p \right).$$

(5.10) En déduire $\mathbb{E}(X_1)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$.

(5.11) En déduire $\sum_{i=0}^N i\pi_i$ lorsque $p \in]0, 1[$ (où π est la loi invariante définie en (5.8)).

Pour le moment, on a défini la dynamique de la population entre le temps 0 et le temps 1. Pour obtenir la composition allélique de la population au temps $k \in \mathbb{N}$, on réitère la même expérience aléatoire k fois de manière indépendante.

(5.12) Soit π^k la loi de probabilité à temps k . Démontrer que la suite $\{\mathbb{E}(\pi^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}(\pi)$ lorsque $p \in]0, 1[$.

(5.13) La suite $\{\mathbb{E}(\pi^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle lorsque $p = 0$ ou $p = 1$?

Pour information: avec un peu plus de travail (qu'on ne fera pas ici), on peut démontrer que π^k converge vers la loi invariante π lorsque $p \in]0, 1[$.

* *
*