Devoir maison n$^{\text{o}}$ 5

À rendre le 3 novembre 2025

Exercice 1 : Analyse

Partie I. Formule du binôme négatif.

Pour tout couple (n, r) d'entiers naturels tels que $0 \leqslant r \leqslant n$, on rappelle la formule du « triangle de Pascal » :

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

1. Montrer que pour tout entier r de $[\![1; n]\!]$ on a

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$$

2. Soit $(n,\ r)$ un couple d'entiers naturels, tels que $1 \leqslant r \leqslant n$. Pour tout réel x de $]0; 1[$, on définit la fonction $f_{r,n}$ par :

$$f_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k.$$

   a) Montrer, pour tout réel x de $]0; 1[$, l'égalité :

$$(1-x) f_{r,n}(x) = x f_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}.$$

   b) On suppose l'entier r fixé. Montrer, lorsque n tend vers $+\infty$, l'équivalence : $\displaystyle \binom{n}{r} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

3. Soit x un réel fixé de $]0; 1[$ et soit r un entier naturel fixé. On veut établir l'existence de la limite de $f_{r,n}(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$, et déterminer la valeur de cette limite.

   a) Justifier l'existence et donner la valeur de $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} f_{0,n}(x)$ et $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} f_{1,n}(x)$.

   b) Soit r un entier naturel non nul. On suppose que, pour tout réel x de $]0; 1[$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} f_{r-1,n}(x) = \frac{x^{r-1}}{(1-x)^r}.$$

   Montrer que, pour tout réel x de $]0; 1[$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_{r,n}(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

   Nous venons de démontrer

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0;1[\text{ et pour tout } r \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^k = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.}$$

Partie II. Développement en série de $\ln(1-x)$

Soit x un réel de $]0;1[$

1. Montrer, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

2. À l'aide d'un encadrement simple, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

3. En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ ainsi que l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Exercice 2 : Loi hypergéométrique

On dispose d'une urne contenant N boules dont une proportion p de boules blanches et une proportion q de boules rouges, avec

$$p \in]0;1[, \qquad pN \in \mathbb{N}, \qquad q = 1-p.$$

On note $N_b = pN$ le nombre de boules blanches et $N_r = qN$ le nombre de boules rouges.

On tire $n \in [\![0;N]\!]$ boules successivement et sans remise, et on note X le nombre de boules blanches obtenues

1. Écrire une fonction python `hypergéométrique(n,nb_blanches,nb_rouges)` qui simule cette expérience attention ici `nb_blanches` désignera le nombre de boules blanches et non la proportion. idem pour `nb_rouges`.
2. Montrer que $X(\Omega) \subset [\![0;N]\!]$. Puis que le nombre de boules blanches tirées est forcément compris entre $\max(0, n-N_r)$ et $\min(n, N_b)$.
3. Soit un entier k vérifiant cette condition, montrer que le nombre de tirages de n boules qui donnent k boules blanches est
$$\binom{n}{k}\frac{pN!}{(pN-k)!}\frac{qN!}{(qN-(n-k))!}.$$
4. Déduire que pour ce même k
$$P(X=k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$
5. Expliquer brièvement pourquoi cette formule reste vraie pour $k \in [\![0;N]\!]$
6. En utilisant le fait que $([X=i])_{i\in[\![0;N]\!]}$ forme un système complet d'évènements et en notant $N_b = a$ $N_r = b$ démontrer la formule de Vandermonde
$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$
7. Montrer que pour pour tout entier naturel k non nul et pour tout entier naturel n
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
8. En déduire que $E(X) = np$.
9. Montrer que $V(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$.
10. Montrer que si les tirages ont lieu simultanément la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées suit la même loi.