Devoir maison n$^{\text{o}}$ 11

À rendre le 5 janvier 2026

Problème : endomorphismes cycliques

Définitions et notations utilisées

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

- On note id l'application identité de E.
- Soient f et g deux endomorphismes de E ; on note $f \circ g$ la composée de f et g.
  On convient que $f^0 = id$, $f^1 = f$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on pose
  $$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$
- Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est **cyclique** si, et seulement si, il existe un vecteur $\overrightarrow{a}$ de E tel que $(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{a}), f^2(\overrightarrow{a}), \ldots, f^{n-1}(\overrightarrow{a}))$ soit une base de E.
  Par exemple, si $n = 2$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{a}$ de E tel que $(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{a}))$ soit une base de E.
  De même, si $n = 3$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{a}$ de E tel que $(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{a}), f^2(\overrightarrow{a}))$ soit une base de E.
- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ on note $\deg(P)$ le degré de P.

La première partie du problème est consacrée à l'étude d'exemples.
La seconde partie propose l'étude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Elle est totalement indépendante de la première partie.

Partie I : Étude d'exemples

1. On considère dans cette question I. 1. que $E = \mathbb{R}^2$.
   Soit α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   a) On choisit $\overrightarrow{a} = (2, 3)$. Calculer $\alpha(\overrightarrow{a})$ et montrer que α est cyclique.
   b) Déterminer le vecteur $\alpha^2(\overrightarrow{a})$ puis déterminer deux réels x et y tels que :
   $$\alpha^2(\overrightarrow{a}) = x\overrightarrow{a} + y\alpha(\overrightarrow{a})$$
   c) Déterminer la matrice A' de α dans la base $(\overrightarrow{a}, \alpha(\overrightarrow{a}))$.
   d) Déterminer une base de $\ker(\alpha - 2id)$.
   e) En déduire un vecteur $\overrightarrow{b}$ non nul de $\mathbb{R}^2$, tel que $(\overrightarrow{b}, \alpha(\overrightarrow{b}))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$.
2. On considère dans cette question I. 2. que $E = \mathbb{R}^3$.
   Soit β l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice
   $$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   a) Montrer que β est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
   b) Montrer que $\beta^2 - 3\beta + 2id = 0$ où 0 désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.
   c) En déduire que β n'est pas cyclique.

Partie II

Dans cette partie, on se donne un entier n supérieur ou égal à 2.

On considère l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(X+1) - P(X)$$

On a donc par exemple $\delta(X^2 - 3X + 1) = \big((X+1)^2 - 3(X+1) + 1\big) - \big(X^2 - 3X + 1\big)$.

On admettra que δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de le vérifier.

1. Dans cette question, on montre que δ est cyclique.
   a) Soit k un entier naturel compris au sens large entre 1 et $n-1$.
   En utilisant la formule du binôme, montrer que le polynôme $\delta(X^k)$ est exactement de degré $k-1$.
   b) Soit maintenant P un élément quelconque de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, le polynôme P étant supposé de degré supérieur ou égal à 1.
   En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$.
   c) Montrer enfin que δ est cyclique en considérant la famille $(X^{n-1}, \delta(X^{n-1}), \delta^2(X^{n-1}), \ldots, \delta^{n-1}(X^{n-1}))$.
2. Dans cette question, on déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme δ.
   a) En utilisant le résultat de la question II. 1. b), montrer que le noyau de l'endomorphisme δ est constitué de l'ensemble des polynômes constants.
   b) Montrer que l'image de l'endomorphisme δ est contenue dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
   Cela signifie qu'il faut montrer que $Im(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$.
   c) En utilisant le théorème du rang, montrer finalement que l'image de l'endomorphisme δ coincide avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. Dans cette question, on introduit une famille de polynômes R_0, R_1, ..., R_{n-1} qui va permettre de démontrer d'une autre manière que δ est cyclique.
   On définit les polynômes R_0, R_1, ..., R_{n-1} de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ en posant :

$$R_0 = 1 \qquad R_1 = \frac{1}{1!}X \qquad R_2 = \frac{1}{2!}X(X-1) \qquad \ldots$$

$$\ldots \qquad R_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+2)$$

   On a donc, pour tout entier j compris au sens large entre 1 et $n-1$,

$$R_j = \frac{1}{j!}X(X-1)(X-2)\ldots(X-j+1) = \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X-k)$$

   a) Montrer que $(R_0, R_1, \ldots, R_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   b) Soient i et j deux entiers naturels, tels que : $i \neq 0$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$.
   Montrer que $\delta(R_j) = R_{j-1}$ puis déterminer $\delta^i(R_j)$ en distinguant les cas $i \leqslant j$ et $i > j$.
   On donnera le résultat de $\delta^i(R_j)$ sans avoir besoin de le justifier.
   c) En déduire une autre démonstration du fait que δ est cyclique.