

Vocabulaire sur les VAR à densité

$(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

- **Densité de probabilité** : se dit d'une fonction f qui vérifie :
 - * pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$;
 - * f est continue sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points;
 - * $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.
- **Variable aléatoire réelle à densité** : se dit d'une variable aléatoire réelle X (c'est-à-dire une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$) pour laquelle on peut trouver une fonction f telle que :
 - * f est une densité de probabilité;
 - * $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.
- **Densité de la VAR X** : il s'agit des densités de probabilité f telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.
Pour une variable à densité donnée il existe une infinité de densités.
- **Loi d'une VAR X à densité** : la donnée de $X(\Omega)$ et d'une densité de X .
- **Espérance d'une variable à densité** : pour X une VAR de densité f , on dit que X admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et dans ce cas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt.$$

- **Moment d'ordre r d'une variable à densité** : pour X une VAR de densité f , on dit que X admet une moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$) si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$ est convergente et dans ce cas

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt.$$

- **Produit de convolution** : soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Lorsque l'intégrale existe, on appelle produit de convolution de f et g la fonction $f * g$ définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Notation	$X(\Omega)$	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
$\mathcal{U}(]a; b[)$ $((a, b) \in \mathbb{R}^2,$ $a < b)$	$X(\Omega) =]a; b[$	$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in]a; b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^{+*})$	$X(\Omega) = \mathbb{R}^+$	$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(0, 1)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$\forall t \in \mathbb{R}, f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$	$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $(\mu \in \mathbb{R},$ $\sigma \in \mathbb{R}^{+*})$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$\forall t \in \mathbb{R},$ $f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\forall x \in \mathbb{R},$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$	$E(X) = \mu$	$V(X) = \sigma^2$

Lois usuelles

Propriétés et théorèmes importants

- **Lien entre variables à densité et densités de probabilité :**
 f est une densité de probabilité si, et seulement si, il existe une VAR X à densité telle que f est une densité de X .
- **Caractérisation des variables à densité :** Soit X une VAR de fonction de répartition F_X .
 X est une variable à densité si, et seulement si :
 - * F_X est continue sur $\mathbb{R}$;
 - * F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- **Caractérisation des fonctions de répartition des VAR à densité :** soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
 F est la fonction de répartition d'une VAR à densité si, et seulement si :
 - * F est continue sur $\mathbb{R}$;
 - * F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points ;
 - * F est croissante sur $\mathbb{R}$;
 - * $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$.
- **Si** X est une VAR à densité et si F_X est sa fonction de répartition **alors** toutes les fonctions f positives ou nulles et telles que en tout point où F_X est dérivable $f(x) = F'_X(x)$ sont des densités de X .
- **Si** X est une VAR à densité et si f est une densité de X **alors**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt.$$

- **Si** X est une VAR à densité **alors** pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$.
- Soit X une VAR de densité f et de fonction de répartition F_X . Pour tous réels a et b tels que $a < b$:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) \\ &= \int_a^b f(t) \, dt \\ &= F_X(b) - F_X(a), \\ P(X < a) &= P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(t) \, dt = F_X(a), \\ P(X > a) &= P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(t) \, dt = 1 - F_X(a). \end{aligned}$$

- **Si** X est une VAR à densité admettant une espérance **alors** $aX + b$ (a et b réels) est une VAR à densité admettant une espérance et

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

- **Si** X et Y sont deux VAR à densité admettant une espérance **alors** $X + Y$ admet une espérance et

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

- **Théorème de transfert :** Soient X une VAR de densité f et g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) \, dt$ est absolument convergente et dans ce cas :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) \, dt.$$

- **Espérance d'une VAR à support compact :** si X est une VAR de densité f et si f est nulle en dehors du segment $[a; b]$ alors X admet une espérance.

— **Loi de la somme de deux VAR à densité indépendantes :**

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes. On note f une densité de X et g une densité de Y .

Alors la variable aléatoire $Z = X + Y$ est une variable à densité dont une densité est la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) \, dt. = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) \, dt.$$

— **Caractérisation de la loi exponentielle :** Soit X une variable à densité, qui n'est pas la variable certaine nulle et qui est à valeur dans $\mathbb{R}^+$.

X suit une loi exponentielle si, et seulement si :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P_{[X > s]}(X > s + t) = P(X > t). \quad (1)$$

Une variable suivant la loi exponentielle est dite **sans mémoire**.

— **Propriétés de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :**

* Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$.

* $\Phi(0) = \frac{1}{2}$;

* $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

— **Lien loi normale centrée réduite et loi normale de Laplace-Gauss :**

X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si, et seulement si, $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

— **Fonction affine d'une loi normale :** Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $aX + b$ (avec $a \neq 0$) suit la loi normale $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

— **Somme de deux lois normales :** soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Alors $X + Y$ est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Ce résultat se généralise au cas de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale.

Questions classiques

- **Montrer qu'une fonction donnée f est une densité de probabilité** : on montre que f est à valeurs positives ou nulles, continue sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et vaut 1.
- **Montrer qu'une fonction donnée f est une densité d'une VAR X** : on montre que f est une densité de probabilité et on dit qu'une densité de probabilité est une densité d'une VAR.
- **Calculer la fonction de répartition d'une VAR à densité lorsqu'on connaît une densité** : on utilise la définition de la notion de densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Il sera souvent nécessaire de mener une discussion suivant la valeur de x .

- **Montrer qu'une VAR donnée X est une VAR à densité** :
Il faut commencer par calculer la fonction de répartition de X (méthode à adapter au contexte de l'exercice) puis on montre que cette fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- **Montrer qu'une fonction de répartition DONNÉE F_X est la fonction de répartition d'une VAR à densité** : on montre que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- **Calculer une densité lorsqu'on connaît la fonction de répartition** : si on sait que X est une variable à densité, pour calculer une densité de X il suffit de calculer F'_X là où F_X est dérivable puis on « complète les points manquants » par une valeur arbitraire positive.
- **Calculer une probabilité d'un événement faisant intervenir une VAR à densité X** : il faut se ramener à une expression de l'événement sous forme d'union et/ou d'intersection d'événements de la forme $[X < a]$, $[a < X < b]$ ou $[X > b]$ (inégalités larges ou strictes, cela fonctionne!).
- **Calculer l'espérance d'une variable à densité** : on montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et on calcule la valeur de cette intégrale.
- **Espérance d'une VAR à densité nulle en dehors d'un segment** : on pourra adopter la rédaction suivante :
 f est une densité et f est nulle en dehors du segment $[a; b]$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et donc X admet une espérance.
- **Calculer la variance d'une variable à densité** : après avoir montré l'existence et calculé l'espérance de X , on montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ est convergente puis on dit que X^2 admet une espérance donc X admet une variance et, d'après la formule de Kœnig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- **Déterminer la loi de $Y = g(X)$ lorsque X est une VAR à densité** :
 1. Déterminer $Y(\Omega)$.
 2. **Si $Y(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable** : cela signifie que Y est une VAR finie ou discrète, on détermine donc sa loi en calculant $P(Y = k)$ pour chaque k appartenant à $Y(\Omega)$.
 3. **Si $Y(\Omega)$ n'est pas un ensemble fini ou dénombrable** : on essaye de montrer que Y est une variable à densité en suivant les étapes ci-dessous.
 - a) Calculer la fonction de répartition de Y (on aura besoin pour cela de la fonction de répartition de X).
 - b) Montrer que Y est une variable à densité soit en reconnaissant la fonction de répartition d'une loi usuelle soit utilisant la méthode ci-dessus (5^{ème} point de cette page).
 - c) Déterminer une densité de Y .

- **Déterminer la loi de la somme de deux VAR à densité indépendantes** : lorsque X et Y sont deux variables à densité on sait que, si X et Y sont **INDÉPENDANTES** alors $X + Y$ est une variable à densité dont une densité est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)g(t) \, dt.$$

Ce calcul d'intégrale nécessite souvent une discussion suivant les valeurs de x . Dans la grande majorité des exercices on ne demande pas de justifier la convergence de cette intégrale et la formule est rappelée.

Intégrales de référence

Dans ce chapitre se cachent les valeurs de certaines intégrales qui peuvent être considérées comme des intégrales de référence.

— $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ ($\lambda > 0$) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx && \text{avec } f \text{ densité de la loi } \mathcal{E}(\lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

— $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$ ($\lambda > 0$) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx &= \frac{1}{\lambda} E(X) && \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

— $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$ ($\lambda > 0$) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx &= \frac{1}{\lambda} E(X^2) && \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda} (V(X) + E(X)^2) = \frac{2}{\lambda^3}. \end{aligned}$$

— $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx && \text{avec } f \text{ densité de la loi } \mathcal{N}(0, 1) \\ &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

— $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx &= \sqrt{2\pi} E(X) && \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

— $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx &= \sqrt{2\pi} E(X^2) && \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ &= \sqrt{2\pi} (V(X) + E(X)^2) = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

$$— \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx :$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx &= \sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx && \text{avec } f \text{ densité de la loi } \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ &= \sigma\sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

$$— \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx :$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx &= \sigma\sqrt{2\pi} E(X) && \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ &= \mu\sigma\sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

$$— \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx :$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx &= \sigma\sqrt{2\pi} E(X^2) && \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ &= \sigma\sqrt{2\pi} (V(X) + E(X)^2) = \sigma\sqrt{2\pi} (\sigma^2 + \mu^2). \end{aligned}$$