Fonctions réelles de deux variables réelles : révisions de sup

Table des matières

I Vocabulaire de base

Pour les définitions qui suivent, f désigne une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les variables sont x et y. **Attention**, les variables ne sont pas toujours notées x et y !

— **Domaine de définition** : c'est l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y)$ existe. On le note souvent $\mathscr{D}_f$. C'est une partie de $\mathbb{R}^2$ que l'on peut parfois demander de représenter graphiquement.

— **Pavé ouvert** : c'est une partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$]a; b[\times]c; d[= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b \text{ et } c < y < d\},$$

avec a, b, c et d des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

— **Fonctions partielles de f en (a, b)** :
  * Fonction partielle en (a, b) par rapport à la première variable : $f_x \ : \ t \mapsto f(t, b)$.
  * Fonction partielle en (a, b) par rapport à la seconde variable : $f_y \ : \ t \mapsto f(a, t)$.

— **Surface représentative de f** : c'est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $(x, y) \in \mathscr{D}_f$ et $z = f(x, y)$. On la note souvent $\mathscr{S}_f$.

— **Ligne ou courbe de niveau c** : il s'agit de l'intersection de $\mathscr{S}_f$ avec le plan d'équation $z = c$. On représente souvent plusieurs lignes de niveau dans un même plan, cela revient à tracer les courbes d'équation $f(x, y) = c$ pour différentes valeurs de c.

— **Fonction continue** : lorsqu'en tout point (a, b) de $\mathscr{D}_f$, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Remarques :

— Le programme officiel indique : *aucune question sur ces notions de continuité ne doit être posée dans une épreuve de mathématiques.*

— L'intersection entre la surface représentative de f et le plan d'équation $x = a$ est la courbe représentative de la fonction partielle de f en (a, b) par rapport à la seconde variable.
De même, l'intersection entre la surface représentative de f et le plan d'équation $y = b$ est la courbe représentative de la fonction partielle de f en (a, b) par rapport à la première variable.

II Calcul différentiel

Dans toute la suite du chapitre, f désigne une fonction définie sur un **pavé ouvert** de $\mathbb{R}^2$, noté U, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 *Dérivées partielles d'ordre 1*

a Définition et premières propriétés

Définition 1
Soit $(a, b) \in U$.
On dit que **f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en (a, b)** si, et seulement si, la fonction partielle f_x est dérivable en a.
Cela revient à dire que le quotient $\dfrac{f(t, b) - f(a, b)}{t - a}$ admet une limite finie lorsque t tend vers a.
Cette limite est alors notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ou $\partial_1 f(a, b)$ et s'appelle la **dérivée partielle de f par rapport à x en (a, b)** ou la **première dérivée partielle de f en (a, b)**.
On définit de même **la dérivée partielle par rapport à y de f**, ou **deuxième dérivée partielle de f**, en (a, b) que l'on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ ou $\partial_2 f(a, b)$ et qui est égale à la limite du quotient $\dfrac{f(a, t) - f(a, b)}{t - b}$ lorsque t tend vers b, si cette limite existe.

Remarque :

Lorsque f est dérivable par rapport à x en (a,b) on a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f'_x(a)$ (où f_x désigne la première fonction partielle en (a,b)).

Définition 2

La fonction qui à tout élément (a,b) associe le réel $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \partial_1 f(a,b)$ est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_1 f$ et s'appelle **la dérivée partielle de f par rapport à x** ou encore **la première dérivée partielle de f**.
C'est une fonction définie sur U ou une partie de U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit de même **la dérivée partielle par rapport à y de f**, ou **deuxième dérivée partielle de f**, que l'on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ou $\partial_2 f$.

Définition 3

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues sur U, on dit que la fonction f est de **classe $\mathscr{C}^1$ sur U**.

Remarque :

Les fonctions partielles sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer tous les résultats d'opérations sur les fonctions dérivables et $\mathscr{C}^1$ pour démontrer qu'une fonction de plusieurs variables est dérivable par rapport à l'une ou l'autre de ses variables ou qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$.

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
- Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- La fonction $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- Si g ne s'annule par sur U, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Conseils méthodologiques : calculer des dérivées partielles d'ordre 1

* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: dans l'expression de la fonction f, on considère que y désigne un paramètre constant et on applique les règles de dérivation avec pour seule variable x.
* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$: dans l'expression de la fonction f, on considère que x désigne un paramètre constant et on applique les règles de dérivation avec pour seule variable y.

Exemple 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y\mathrm{e}^{-x^2-y}$. Par composition et produit la fonction f est dérivable par rapport à ses deux variables sur $\mathbb{R}^2$.
- Pour calculer la dérivée de f par rapport à x, on considère que y est une constante. On a donc une expression de la forme $K\mathrm{e}^{u(x)}$ qui se dérive sous la forme $Ku'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
  On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2-y} = -2xy\mathrm{e}^{-x^2-y}$
- Pour calculer la dérivée de f par rapport à y, on considère que x est une constante. On a donc une expression de la forme $u(y)\mathrm{e}^{v(y)}$ qui se dérive sous la forme $u'(y)\mathrm{e}^{v(y)} + u(y)v'(y)\mathrm{e}^{v(y)}$.
  On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y} + y \times (-1)\mathrm{e}^{-x^2-y} = (1-y)\mathrm{e}^{-x^2-y}$

Exemple 2 :

Même si le programme officiel de BCPST se limite aux fonctions de deux variables, on peut remarquer que le calcul des dérivées partielles peut facilement s'étendre aux fonctions de 3 variables.

On considère la fonction f définie sur $\Omega = \mathbb{R}^{+*} \times [1;+\infty[\times\mathbb{R}$ par $f(x,y,z) = xy\mathrm{e}^z + \ln(x)\sqrt{y-1}$.

Par composée, produit et somme de fonctions usuelles, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times]1;+\infty[\times\mathbb{R}$ (problème en $y=1$!). Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^{+*}\times]1;+\infty[\times\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y\mathrm{e}^z + \frac{\sqrt{y-1}}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x\mathrm{e}^z + \frac{\ln(x)}{2\sqrt{y-1}} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy\mathrm{e}^z.$$

b Gradient

Définition 4

Soit f une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(a,b) \in U$. On appelle **gradient de f en (a,b)**, et on note $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a,b)$, le vecteur de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right).$$

Remarques :

- Dans un repère orthonormé, le vecteur gradient pointe dans la direction où la fonction croit le plus rapidement et son module est égal au taux de croissance dans cette direction.
- En sciences de la Terre, le gradient est utilisé pour la variation dans toutes les directions d'un paramètre de la lithosphère, de l'hydrosphère, de l'atmosphère ou de la biosphère. On rencontre parfois un abus de langage qui appelle gradient la variation d'une grandeur, par exemple la température T, dans une seule direction, souvent la direction verticale z. Cet abus de langage confond donc le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, T$ et la dérivée partielle $\dfrac{\partial T}{\partial z}$.
- $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a,b)$ est un vecteur normal à la ligne de niveau $f(x,y) = f(a,b)$ en (a,b).

c Variation élémentaire au voisinage d'un point

Propriété 2

Soit $(a,b) \in U$. Lorsque x est proche de a et y est proche de b on a :

$$f(x,y) - f(a,b) \approx (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

ou encore

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right).$$

Interprétation graphique :

Cette propriété signifie qu'au voisinage du point $A(a, b, f(a,b))$ de la surface représentative de f le plan d'équation $z = f(a,b) + (x-a)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ est très proche de la surface représentative de f. Ce plan s'appelle **le plan tangent** à la surface représentative de f au point A.

Exemple 3 :

On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto 1 - \sqrt{x^2+y^2+2}$ et $\mathscr{S}$ la surface représentative de f dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Déterminons une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ au point $M(1,1,-1)$.

On peut tout d'abord vérifier que M est bien sur la surface $\mathscr{S}$ car on a $1 - \sqrt{1^2+1^2+2} = -1$.

La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2+2$ est polynômiale donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $[2;+\infty[$. La fonction $t \mapsto 1-\sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[2;+\infty[$.

Donc par composée, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+2}}.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.
On a donc, pour (x,y) au voisinage de $(1,1)$,

$$f(x,y) \approx f(1,1) + (x-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (y-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Et, le plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ en M a pour équation :

$$\begin{aligned} z &= -1 + (x-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (y-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow & x + y + 2z = 0. \end{aligned}$$

d Composée classique

Si vous ne voulez pas apprendre la formule suivante par cœur il faut être capable de la retrouver vite !

Propriété 3
Soit f une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soient u et v deux fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall t \in I$, $(u(t), v(t)) \in U$.
Alors la fonction $g\ :\ t \mapsto f(u(t), v(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

Exemple 4 :
On considère une fonction u de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{t}{2}\mathrm{e}^{x/2}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u(x,t).$$

On pose, pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$g(y) = u\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right).$$

Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par g.
D'après nos connaissances sur les fonctions usuelles, la fonction $y \mapsto (\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$. Donc par composée, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour tout $y > 0$:

$$g'(y) = \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right)$$

Or, d'après notre énoncé, on sait que pour tout $y > 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right) + \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{2}\mathrm{e}^{\ln(y)/2}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right) = u\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right) \\ \Leftrightarrow &\frac{\partial u}{\partial x}\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right) = -\frac{\sqrt{y}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right) + u\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right) \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $y > 0$:

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{y}\left(-\frac{\sqrt{y}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right) + u\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right)\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\ln(y), \mathrm{e}^{\sqrt{y}}\right) \\ &= \frac{1}{y}g(y) \end{aligned}$$

Définition 5
Lorsque cela est possible, on peut dériver les deux dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chacune de leurs variables. On obtient 4 fonctions :
* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: résultat obtenu en dérivant la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x ;
* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$: résultat obtenu en dérivant la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à y ;
* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$: résultat obtenu en dérivant la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à x ;
* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$: résultat obtenu en dérivant la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à y.

Ces 4 fonctions s'appellent les **dérivées partielles d'ordre 2 de f**.

Exemple 5 :
Reprenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y\mathrm{e}^{-x^2-y}$.
Calculons les 4 dérivées secondes de cette fonction f.
Pour avoir accès aux dérivées secondes il faut d'abord avoir calculé les dérivées premières, ce que nous avons fait à l'exemple 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy\mathrm{e}^{-x^2-y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1-y)\mathrm{e}^{-x^2-y}$$

On souhaite maintenant calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ signifie que l'on doit dériver la fonction f deux fois par rapport à x.
La dérivée première par rapport à x est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy\mathrm{e}^{-x^2-y}$. Pour la dériver par rapport à x nous considérons que y est une constante. On a donc une fonction du type $u(x)\mathrm{e}^{v(x)}$ qui se dérive sous la forme $u'(x)\mathrm{e}^{v(x)} + u(x)v'(x)\mathrm{e}^{v(x)}$.
On obtient : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y} - 2xy \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2-y} = -2y(1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y}$.

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ signifie que l'on doit dériver la fonction f une fois par rapport à x dériver le résultat obtenu par rapport à y.
La dérivée première par rapport à x est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy\mathrm{e}^{-x^2-y}$. Pour la dériver par rapport à y nous considérons que x est une constante. On a donc une fonction du type $u(y)\mathrm{e}^{v(y)}$ qui se dérive sous la forme $u'(y)\mathrm{e}^{v(y)} + u(y)v'(y)\mathrm{e}^{v(y)}$.
On obtient : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y} - 2xy \times (-1)\mathrm{e}^{-x^2-y} = -2x(1-y)\mathrm{e}^{-x^2-y}$.

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ signifie que l'on doit dériver la fonction f une fois par rapport à y dériver le résultat obtenu par rapport à x.
La dérivée première par rapport à y est $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1-y)\mathrm{e}^{-x^2-y}$. Pour la dériver par rapport à x nous considérons que y est une constante. On a donc une fonction du type $K\mathrm{e}^{u(x)}$ qui se dérive sous la forme $Ku'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
On obtient : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2x(1-y)\mathrm{e}^{-x^2-y}$.

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ signifie que l'on doit dériver la fonction f deux fois par rapport à y.

Toujours avec le même raisonnement on obtient : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (-2+y)\mathrm{e}^{-x^2-y}$.

Remarque :

On peut remarquer que les dérivées dites « croisées » sont égales : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

Définition 6
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 existent et sont continues sur U.

Propriété 4
Soient f et g deux fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^2$ sur un pavé ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
— Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
— La fonction $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
— Si g ne s'annule par sur U, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Théorème 1 : Théorème de Schwarz
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur le pavé **ouvert** U alors

$$\forall (a,b) \in U, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

Remarque :

En pratique vous rencontrerez presque uniquement des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ donc les dérivées croisées seront presque toujours égales !

III Extremum local d'une fonction de deux variables

Définition 7
Soit f une fonction définie sur un pavé ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $(a,b) \in U$.
— On dit que f admet un **minimum global en $\boldsymbol{(a,b)}$** (resp. **maximum global en $\boldsymbol{(a,b)}$**) si : $\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) \geqslant f(a,b)$ (resp. $\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) \leqslant f(a,b)$).
— On dit que f admet un **minimum local en $\boldsymbol{(a,b)}$** (resp. **maximum local en $\boldsymbol{(a,b)}$**) s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in]a-r; a+r[\times]b-r; b+r[\cap U, \quad f(x,y) \geqslant f(a,b)$$

(resp. $\forall (x,y) \in]a-r; a+r[\times]b-r; b+r[\cap U, \quad f(x,y) \leqslant f(a,b)$).

Définition 8
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un pavé ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(a,b) \in U$.
On dit que **$\boldsymbol{(a,b)}$ est un point critique de $\boldsymbol{f}$** si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a,b) = (0,0)$.

Remarque :

(a,b) est un point critique de f si, et seulement si, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$.

Théorème 2
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur sur un pavé **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(a,b) \in U$. **SI** f admet un extremum local en (a,b) **ALORS** (a,b) est un point critique de f.

Attention la réciproque à ce théorème est en générale fausse. Il peut exister des points critiques de f qui ne sont pas des extremums locaux.

Conseils méthodologiques : recherche d'extremum

* On commence par chercher les points $(a,b) \in \mathscr{D}_f$ qui vérifient $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$.

S'il existe des extremums ils sont forcément parmi les solutions de ce système !

* Pour chacun des couples (a,b) solutions du système ci-dessus on étudie le signe de $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ soit de façon globale soit localement au voisinage de (a,b).

Exemple 6 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$.
Commençons par regarder si f admet un ou plusieurs points critiques.
f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 9y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 9x.$$

On cherche donc les couples (x,y) solutions de :

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{3} \\ x^4 - 27x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{3} \\ x = 0 \text{ ou } x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 3 \\ x = 3 \end{cases}.$$

f admet donc deux points critiques : $(0,0)$ et $(3,3)$

— Au voisinage de $(0,0)$: on a $f(0,0) = 0$ et on peut par exemple remarquer que $f(x,0) = x^3$, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local car pour $x > 0$ $f(x,0) > f(0,0)$ et pour $x < 0$, $f(x,0) < f(0,0)$.

— Au voisinage de $(3,3)$: on a tout d'abord $f(3,3) = -27$.
Étudions alors le signe de $f(3+h,3+k) - f(3,3)$:

$$f(3+h,3+k) - f(3,3) = (3+h)^3 + (3+k)^3 - 9(3+h)(3+k) - (-27) = ... = h^3 + k^3 + 9h^2 + 9k^2 - 9hk.$$

L'astuce consiste alors a écrire cette quantité sous la forme *(guidé aux concours)* :

$$f(3+h,3+k) - f(3,3) = h^2\left(h + \frac{9}{2}\right) + k^2\left(k + \frac{9}{2}\right) + \frac{9}{2}(h-k)^2.$$

Ainsi, pour $(h,k) \in \left[-\dfrac{9}{2}; +\infty\right[$, $f(3+h,3+k) - f(3,3) \geqslant 0$.

Cela signifie que pour $(x,y) \in \left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ (pavé contenant $(3,3)$) on a

$$f(x,y) \geqslant f(3,3) = -27.$$

f admet donc en $(3,3)$ un minimum local égal à -27.
On peut remarquer que, à y fixé, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,y) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,y) = -\infty$ donc f ne peut pas admettre de minimum global.

Exemple 7 : Ajustement affine par les moindres carrés

Revoir votre cours de sup !