Banque Agro-véto 2016 Modélisation
Correction

Partie 1 : Équation de transport uni-dimensionnelle

1. 1.1. Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -cu_0'(x-ct) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = u_0'(x-ct).$$

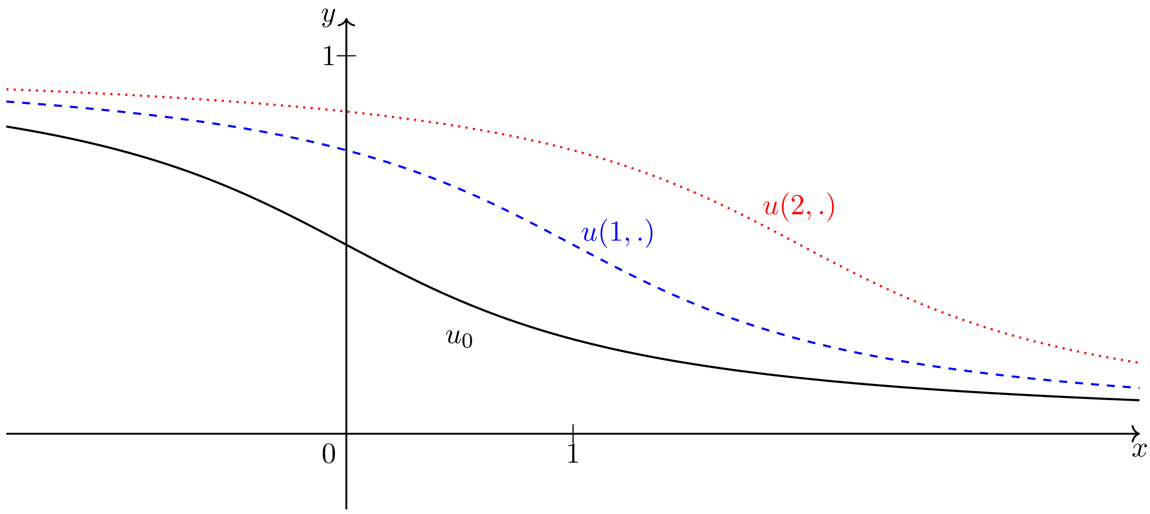
   1.2. D'après la question précédente, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial c}(t,x) = -cu_0'(x-ct) + cu_0'(x-ct) = 0.$$

   Donc u est bien solution de (1).

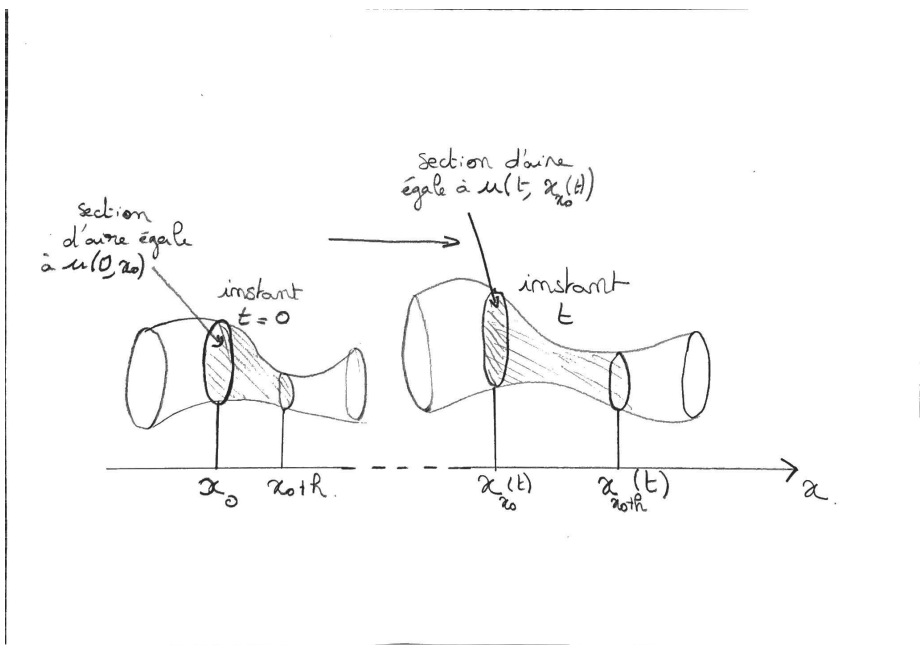
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(0, x) = u_0(x)$.
   On dit que u_0 est une condition initiale car la variable t désigne souvent le temps et que la fonction u co¨incide avec la fonction u_0 à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire l'instant initial.

3.



À partir de la courbe représentative de u_0 on obtient les courbes représentative de $u(1, .)$ et $u(2, .)$ par translation de vecteur $\vec{i}$ et $2\vec{i}$. On comprend donc la notion de transport.

4.



5. L'hypothèse c positif signifie que le sang s'écoule « vers la droite » ou encore « vers les x croissants ».
6. On a ici deux équations différentielles du type $y' = cste$ donc les solutions sont des fonctions affines.

   On a donc x_{x_0} et x_{x_0+h} qui font partie de l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto ct + K$ avec $K \in \mathbb{R}$. La valeur de K est déterminée grâce à la condition initiale.

   $x_{x_0}(0) = x_0$ nous donne $x_{x_0} : t \mapsto ct + x_0$ et $x_{x_0+h}(0) = x_0 + h$ nous donne $x_{x_0+h} : t \mapsto ct + x_0 + h$.
7. 7.1. u étant l'aire d'une section d'artère à un instant t et un abscisse x, $V(t)$ représente le volume de fluide contenu dans l'artère à l'instant t entre les abscisses $x_0 + ct$ et $x_0 + h + ct$, c'est-à-dire le volume de la tranche de fluide considérée dans ces questions à l'instant t.

   7.2. Effectuons dans l'intégrale donnée pour $V(t)$ le changement de variable $s = z + ct$. Ce changement de variable est bien de classe $\mathscr{C}^1$, z varie de x_0 à $x_0 + h$ et on a $\mathrm{d}s = \mathrm{d}z$.

   On obtient, grâce à ce changement de variable :

$$V(t) = \int_{x_0}^{x_0+h} u(t, z + ct)\,\mathrm{d}z.$$

   En renommant la variable s, on obtient le résultat demandé.

   7.3. La fonction u est supposée de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et la fonction $(t, s) \mapsto s + ct$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Par composée, $(t, s) \mapsto u(t, s + ct)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

   On applique alors la **règle 2** et on obtient que :

$$V'(t) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial}{\partial t}\left(u(t, s + ct)\right)\,\mathrm{d}s$$

8. 8.1. On suppose ici que le volume de fluide ne varie pas avec le temps ce qui correspond à supposer que le fluide est incompressible.

   8.2. Grâce à la **règle 1.a.**

$$\begin{aligned} V'(t) &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial}{\partial t}\left(u(t, s + ct)\right)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

   Ainsi, l'hypothèse $V'(t) = 0$ devient :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial s}(t, s + ct)\,\mathrm{d}s = 0.$$

9. 9.1. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} G(x_0 + h) - G(x_0) &= \int_0^{x_0+h} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct)\,\mathrm{d}s - \int_0^{x_0} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial u}{\partial t}(t, s + ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, s + ct)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

   Donc d'après la question précédente, $G(x_0 + h) - G(x_0) = 0$ et ainsi $G(x_0 + h) = G(x_0)$.

   9.2. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = 0.$$

   Donc $\dfrac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers 0 ce qui signifie que G est dérivable en x_0 et $G'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} = 0$.

10. On a montré que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $G'(x_0) = 0$.

Or la fonction $s \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, s+ct) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}(t, s+ct)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car u est supposée $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

D'après le théorème fondamentale de l'analyse, G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x+ct) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}(t, x+ct)$.

Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_0+ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_0+ct) = 0.$$

Pour tout réel x et tout $t \in \mathbb{R}^+$, en prenant $x_0 = x - ct$, l'égalité ci-dessus devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0.$$

Partie 2 : Simulation numérique de l'équation de transport

1.

1.1.

```
def Uzero(x):
    if x<=1:
        return 1
    else:
        return 0
```

1.2.

```
def MaxiLigne(M,i):
    L=[abs(M[i,j]) for j in range(np.shape(M)[1])]
    return max(L)
```

2. 2.1.

2.1.1. Les lignes 4 à 7 permettent de remplir la premier ligne et la première colonne de la matrice U grâce à la condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$ (lignes 4 et 5) et la condition au bord $u(t, 0) = 1$ (lignes 6 et 7).

2.1.2. La formule donnée (6) est valable pour $i \in [\![0; N_t - 1]\!]$ donc dans la ligne 8 on met `for i in range(0,Nt)` et elle est valable pour $j \in [\![1; N_x]\!]$ donc à la ligne 9 on met `for j in range(1,Nx+1)`.

2.2.

2.2.1. a) Le paramètre `b` de la fonction `Test` prendra la valeur `False` dès qu'il existe i tel que $C[i] > C[0]$. Par contraposée, la fonction `Test` renvoie `True` si, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, $C[i] \leqslant C[0]$.
L'affirmation est donc vraie.

b) La fonction `Test` renvoie `True` ou `False` qui sont des booléens et non des chaines de caractère.
L'affirmation est donc fausse.

c) Lors du passage dans la boucle `for` pour $i = 0$, le test $V[i] > V[0]$ est toujours faux, quel que soit le vecteur V. Ce passage est donc inutile et on peut bien remplacer par `for i in range(1,n)`.
L'affirmation est vraie.

2.2.2. La fonction `Stable` commence par appliquer la fonction `Norme` à U et donc construit le vecteur, que nous appellerons C, contenant les valeurs des éléments maximaux de chaque ligne de U. En appliquant la fonction `Test` à C on regarde alors si tous les éléments de C sont, en valeur absolue, inférieurs ou égaux au premier coefficient de C.

Cela revient donc à regarder si la valeur maximale, en valeur absolue, des coefficients $u_{i,j}$ est située sur la première ligne de U c'est-à-dire la valeur maximale de $|u|$ est atteinte à l'instant initial. Or à l'instant initial, u vaut 0 ou 1.

Pour conclure la fonction `Stable` appliquée à U permet de savoir si $u(x, t)$ est borné par 1.

3. 3.1. On sait que la fonction u_0 vaut 1 sur $]-\infty; 1]$ et 0 sur $]1; +\infty[$. Donc la figure A2 correspond à la fonction u_0, c'est-à-dire à $u(t_0, .)$.

On sait ensuite que $u(t, x) = u_0(x - t)$. Donc les courbes de $u(t_1, .)$ et $u(t_2, .)$ s'obtiennent à partir de u_0 par des translation de vecteur $t_1\vec{i}$ et $t_2\vec{i}$.

Comme on suppose que $t_1 < t_2$, on peut en déduire que la figure A1 correspond à $u(t_1, .)$ et la figure A3 correspond à $u(t_2, .)$.

3.2. Si l'on admet que la méthode d'approximation qui nous est donnée est bien construite on devrait avoir une courbe qui se rapproche de plus en plus de la solution réelle lorsque le nombre de points utilisés dans la discrétisation en x devient plus grand.

On sait que la solution réelle est un « créneau » et c'est la courbe en pointillé qui s'en rapproche le plus.

Donc B1 correspond à $N_x^{(2)}$ et B2 correspond à $N_x^{(1)}$.

Partie 3 : Ondes progressives pour un modèle dynamique des populations

1. 1.1. Pour arriver en position x_i à l'instant τ il n'y a que deux possibilités : être en position x_{i-1} à l'instant 0 (c'est l'instant qui précède l'instant τ) et s'être déplacé vers la droite ou être en position x_{i+1} à l'instant 0 et s'être déplacé vers la gauche.

On a donc bien : $A(\tau, i) = (A(\tau, i) \cap A(0, i-1)) \cup (A(\tau, i) \cap A(0, i+1))$.

1.2. Avec le même raisonnement qu'à la question précédente, on peut écrire :

$$A((n+1)\tau, i) = (A((n+1)\tau, i) \cap A(n\tau, i-1)) \cup (A((n+1)\tau, i) \cap A(n\tau, i+1)) .$$

On a ici une union de deux événements incompatibles donc :

$$\begin{aligned} P((n+1)\tau, i) &= P\left(A((n+1)\tau, i) \cap A(n\tau, i-1)\right) + P\left(A((n+1)\tau, i) \cap A(n\tau, i+1)\right) \\ &= P(A(n\tau, i-1))\underbrace{P_{A(n\tau,i-1)}\left(A((n+1)\tau, i)\right)}_{\text{déplac. vers la droite}} + P(A(n\tau, i+1))\underbrace{P_{A(n\tau,i+1)}\left(A((n+1)\tau, i)\right)}_{\text{déplac. vers la gauche}} \\ &= P(n\tau, i-1) \times p + P(n\tau, i+1) \times q \end{aligned}$$

1.3. Comme l'énoncé ne donne pas d'information sur la position initiale, on peut juste affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = \{ih / i \in \mathbb{Z}\}$.

En cas de convergence absolue, $E(X_n) = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{Z}} ihP(X_n = ih)$ et $E(X_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{Z}} ihP(X_{n+1} = ih)$.

Or on a $P(X_n = ih) = P(n\tau, i)$ et $P(X_{n+1} = ih) = P((n+1)\tau, i)$.

D'après la question précédente, si X_n admet une espérance, alors X_{n+1} admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} ih\left(pP(n\tau, i-1) + qP(n\tau, i+1)\right) \\ &= hp\sum_{i \in \mathbb{Z}} iP(n\tau, i-1) + hq\sum_{i \in \mathbb{Z}} iP(n\tau, i+1) \\ &= hp\sum_{j \in \mathbb{Z}} (j+1)P(n\tau, j) + hq\sum_{k \in \mathbb{Z}} (k-1)P(n\tau, k) \\ &= \underbrace{(hp + hq)}_{=h}\sum_{j \in \mathbb{Z}} jP(n\tau, j) + (hp - hq)\sum_{j \in \mathbb{Z}} P(n\tau, j) \\ &= \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{Z}} jhP(n\tau, j)}_{=E(X_n)} + h(p-q)\underbrace{\sum_{j \in \mathbb{Z}} P(X_n = jh)}_{=1} \\ &= E(X_n) + h(p-q) \end{aligned}$$

1.4. On suppose donc dans cette question que $X_0 = x_0$ (constante) et donc $E(X_0) = x_0$.

La suite réelle $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $h(p-q)$ et de premier terme x_0. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad E(X_n) = x_0 + nh(p-q).$$

La position moyenne après un temps $n\tau$ est donc $x_0 + nh(p-q)$.

1.5. D'après la linéarité de l'espérance et la question précédente

$$E(Y_n) = \frac{x_0}{n\tau} + \frac{h(p-q)}{\tau}.$$

Y_n étant homogène à une vitesse (distance/temps), on peut interpréter $E(Y_n)$ comme la vitesse moyenne de la particule.

On peut aussi remarquer que lorsque $n \to +\infty$, $E(Y_n)$ tend vers $\dfrac{h(p-q)}{\tau}$, que l'on peut interpréter comme la vitesse moyenne asymptotique de la particule.

2. Lorsqu'on suppose $p = q$ cela signifie que $p = q = \dfrac{1}{2}$ et donc la particule se déplace de façon équiprobable vers la gauche ou la droite.

3. La fonction de deux variables P étant supposé de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, pour chaque x fixé, la fonction d'une variable $t \mapsto P(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. D'après la formule de Taylor-Young cette fonction admet donc un développement limité d'ordre 1 au voisinage de t (quel que soit t fixé dans $\mathbb{R}^+$) qui est donné par :

$$P(t+\tau, x) = P(t,x) + \tau \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \mapsto P(t,x)) + o(\tau) = P(t,x) + \tau \frac{\partial P}{\partial t}(t,x) + o(\tau)$$

De même, la fonction $x \mapsto P(t,x)$ admet un développement limité d'ordre 2 en tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(t, x+h) = P(t,x) + h\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) + o(h^2).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
pP(t,x-h) + qP(t,x+h) &= p\left(P(t,x) - h\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) + \frac{(-h)^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) + o(h^2)\right) \\
&\quad + q\left(P(t,x) + h\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) + o(h^2)\right) \\
&= (p+q)P(t,x) + h(q-p)\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) + (p+q)\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) + o(h^2) \\
&= P(t,x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) + o(h^2) \quad \text{car } p = q = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4. Comme on a supposé que la fonction P vérifie : $P(t+\tau,x) = pP(t,x-h) + qP(t,x+h)$, on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
&P(t,x) + \tau\frac{\partial P}{\partial t}(t,x) + o(\tau) = P(t,x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) + o(h^2) \\
\Rightarrow &\tau\frac{\partial P}{\partial t}(t,x) + o(\tau) = \frac{2D\tau}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) + o(\tau) \text{car } h^2 = 2D\tau \\
\Rightarrow &\frac{\partial P}{\partial t}(t,x) + o(1) = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) + o(1) \qquad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x),
\end{aligned}$$

car on fait tendre τ vers 0 et par définition $o(1) \to 0$.

5. Le jury attendait ici que l'on fasse une analogie avec le modèle logistique (étudié dans le chapitre sur les équations différentielles). Si n désigne une espèce animale, le terme $rn(1-n)$ correspond à un terme source avec effet de seuil.

6. Supposons que n est solution de l'équation (8) et posons : $\tilde{n}(t,x) = n(\alpha t, \beta x)$. On a alors :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}(t,x) = \alpha\frac{\partial n}{\partial t}(\alpha t, \beta x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}(t,x) = \beta^2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(\alpha t, \beta x).$$

D'après l'équation (8) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}(t,x) &= \alpha\left(D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(\alpha t, \beta x) + rn(\alpha t, \beta x)\left(1 - n(\alpha t, \beta x)\right)\right) \\
&= \alpha\left(\frac{D}{\beta^2}\frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}(t,x) + r\tilde{n}(t,x)\left(1 - \tilde{n}(t,x)\right)\right) \\
&= \frac{\alpha D}{\beta^2}\frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}(t,x) + \alpha r\tilde{n}(t,x)\left(1 - \tilde{n}(t,x)\right)
\end{aligned}$$

On choisit alors de prendre $\alpha = \dfrac{1}{r}$ et $\beta = \sqrt{\alpha D} = \sqrt{\dfrac{D}{r}}$.

On a alors montré que si n est solution de (8), $\tilde{n}$ est solution de

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}(t,x) + \tilde{n}(t,x)\left(1 - \tilde{n}(t,x)\right).$$

7. On suppose donc que n est une solution en onde progressive de (8) de vitesse de propagation c et de profil d'onde $\bar{n}$.

   On a alors $n(t,x) = \bar{n}(x - ct)$ et donc, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial n}{\partial t}(t,x) = -c\bar{n}'(x-ct) \qquad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(t,x) = \bar{n}''(x-ct).$$

   Ainsi, l'équation (8) devient : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $-c\bar{n}'(x-ct) = \bar{n}''(x-ct) + \bar{n}(x-ct)(1-\bar{n}(x-ct))$.

   En prenant $t = 0$ et $x = \xi$ on obtient : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad -c\bar{n}'(\xi) = \bar{n}''(\xi) + \bar{n}(\xi)(1 - \bar{n}(\xi))$.

8. L'indication donnée par l'énoncé n'est en fait pas utile ici.

   La fonction f étant supposée de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur n'importe quel segment de $\mathbb{R}$. Appliquons ce théorème au segment $[n; n+1]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_n \in]n; n+1[$ tel que

$$f'(\xi_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = f(n+1) - f(n).$$

   Or on suppose que f admet une limite finie L en $+\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) - f(n) = L - L = 0$.

   Comme $\xi_n \in]n; n+1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n = +\infty$.

   En conclusion, on a bien trouvé une suite ξ_n telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f'(\xi_n) = 0$.

9. 9.1. On sait que $\bar{n}'(\xi) = V(\xi)\bar{n}(\xi)$. Toutes les fonctions entrant en jeu dans cette égalité sont dérivables et en dérivant on obtient : $\bar{n}''(\xi) = V'(\xi)\bar{n}(\xi) + V(\xi)\bar{n}'(\xi)$.

   D'après la question 7. de cette partie on a alors :

$$\begin{aligned}
&- c\bar{n}'(\xi) - \bar{n}(\xi)(1 - \bar{n}(\xi)) = V'(\xi)\bar{n}(\xi) + V(\xi)\bar{n}'(\xi) \\
\Rightarrow &- c\frac{\bar{n}'(\xi)}{\bar{n}(\xi)} - (1 - \bar{n}(\xi)) = V'(\xi) + \frac{V(\xi)\bar{n}'(\xi)}{\bar{n}(\xi)} \qquad \text{car } \bar{n}(\xi) \neq 0 \\
\Rightarrow &- cV(\xi) = V'(\xi) + V(\xi)^2 + 1 - \bar{n}(\xi)
\end{aligned}$$

   9.2. V est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$, donc d'après la question 8. il existe une suite ξ_n qui tend vers $+\infty$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} V'(\xi_n) = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
&- cV(\xi_n) = V'(\xi_n) + V(\xi_n)^2 + 1 - \bar{n}(\xi_n) \\
\Rightarrow &- c\lim_{n \to +\infty} V(\xi_n) = \lim_{n \to +\infty} V'(\xi_n) + \lim_{n \to +\infty} V(\xi_n)^2 + 1 - \lim_{n \to +\infty} \bar{n}(\xi_n) \\
\Rightarrow &- c \times (-\lambda) = 0 + (-\lambda)^2 + 1 - 0,
\end{aligned}$$

   car d'après la définition d'une solution en onde progressive $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \bar{n}(\xi) = 0$.

   On a donc bien $c\lambda = \lambda^2 + 1$.

   9.3. D'après la question précédente, $c = \lambda + \dfrac{1}{\lambda}$.

   Or la fonction $\lambda \mapsto \lambda + \dfrac{1}{\lambda}$ est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$ donc admet un minimum en $\lambda = 1$ et ce minimum vaut 2.

   On a donc $c = \lambda + \dfrac{1}{\lambda} \geqslant 2$.