Exercices : Suites réelles

Suites usuelles

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par les relations : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n+3} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
4. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, on se propose de déterminer l'expression, en fonction des deux premiers termes u_0 et u_1, du terme général des suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 2 \qquad (E)$$

1. Écrire une fonction Python `suite`, prenant en argument un entier naturel n et deux réels a et b, et qui renvoie la liste $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ où la suite u vérifie la relation (E), $u_0 = a$ et $u_1 = b$.
2. a) Déterminer quelle(s) suite(s) constante(s) vérifie(nt) (E).
   b) En notant ℓ la valeur d'une telle suite constante et en posant $v_n = u_n - \ell$, vérifier que (v_n) est linéairement récurrente d'ordre 2.
   c) En déduire alors la valeur de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 3A + 4I$ où I désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n I.$$
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et en déduire l'expression de A^n en fonction de A, I et n.

Limites de suites

Exercice 4 :

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{-n^2}$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$ où $S_N = \frac{1}{N^3}\sum_{n=1}^{N} \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Étudier la fonction f et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   b) Représenter, sur le même graphique que celui de la question précédente, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
3. a) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente et que sa limite ℓ vérifie $\ell \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   b) On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1}$.
   Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente et que sa limite ℓ' vérifie $\ell' \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   c) Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n/2}$.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x/2}$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution notée α et que $\alpha \in [0;1]$.
2. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
3. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, que vaut sa limite ?
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   Indication : ne PAS faire de raisonnement par récurrence. Penser au théorème des accroissements finis.
5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Écrire un programme Python qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Calculs de sommes

Exercice 7 :

Soit x un nombre réel et n un entier naturel.

On note $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

1. Exprimer le nombre complexe $C_n + \mathrm{i}S_n$ sans le signe $\sum$ et en fonction de x et n.
2. En déduire une expression des réels C_n et S_n en fonction de n et x et sans le signe $\sum$.
   Indication : $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2})$.

Exercice 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

Exprimer en fonction de n la somme $S = \sum_{k=3}^{2n} \left(2^{3k+1} \times \frac{4^{k+1}}{\mathrm{e}^{2k+1}} \right)$.

Pour s'entrainer encore...

Les exercices de cette section ne seront pas corrigés en classe. Ces exercices sont réservés aux étudiants maitrisant les exercices précédents et souhaitant s'entrainer encore.

Exercice 9 :

L'évolution d'une population peut être modélisée par la dynamique suivante :

$$P_0 \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = \rho_n P_n$$

où P_n est l'estimation de la population à l'instant n et ρ_n est le taux de croissance de la population. En 1845, Verhulst a proposé de tenir compte de l'épuisement du milieu nutritif ou du confinement dans une superficie limitée par le choix de la croissante $\rho_n = \frac{\rho}{P_n + K}$ avec ρ et K deux paramètres strictement positifs. On suppose désormais la croissance ainsi définie.

1. Montrer qu'aucun terme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est nul.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $Q_n = \frac{1}{P_n}$. Montrer que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique puis exprimer Q_n en fonction de n, Q_0, K et ρ.
3. Discuter suivant les valeurs du quotient $\frac{K}{\rho}$ le comportement asymptotique (en grand temps) de $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celui de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Grâce à un programme Python, illustrer graphiquement le comportement asymptotique de P_n en fonction des valeurs du quotient $\frac{K}{\rho}$.

Exercice 10 :

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \geqslant 0$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^3}{2}$$

1. Montrer que pour tout n, $u_n \geqslant 0$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument u_0 et n, et affichant la valeur de u_n.
   Tester cette fonction pour plusieurs valeurs de u_0 et conjecturer la valeur de la limite de u_n.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x + x^3}{2}$.
   a) Déterminer les variations de f.
   b) Déterminer pour tout réel x positif le signe de $f(x) - x$.
4. Si la suite converge vers ℓ, quelles sont les valeurs possibles de ℓ ?
5. a) Que dire de la suite si $u_0 = 0$? Et si $u_0 = 1$?
   b) On suppose que $u_0 \in]0; 1[$. Montrer que (u_n) décroit.
   Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
6. On suppose maintenant que $u_0 > 1$. Montrer que pour tout n, $u_n > 1$.
   Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 11 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{x+1}{3}\right) = f(x)$.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $f(u_0) = f(1/2)$. Que peut-on en conclure pour f ?

Exercice 12 :

Soit $k > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = k u_{n+1} u_n^2$. Calculer u_n en fonction de u_0, u_1, n et k. (On cherchera un réel c tel que la suite $\ln(u_n) - c$ soit récurrente linéaire d'ordre 2.)

Exercice 13 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$. Calculer u_n en fonction de u_0, u_1 et n. En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction

Correction de l'exercice 1 :

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n > 0$ ».
   On a $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   Alors $u_n > 0$ et $2u_n + 3 > 0$, donc par quotient, $u_{n+1} > 0$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vérifiée.
   Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2u_n+3}$. Or, $u_n > 0$, donc $2u_n + 3 > 3$ et ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
   Comme $u_n > 0$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n+3}{u_n} = 2 + \frac{3}{u_n} = 2 + 3v_n.$$
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique.
4. On commence par résoudre : $x = 2 + 3x \Leftrightarrow x = -1$.
   On pose alors $w_n = v_n - (-1) = v_n + 1$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = 2 + 3v_n + 1 = 3w_n.$$
   La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $w_0 = \dfrac{1}{u_0} + 1 = 2$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2 \times 3^n$.
   On en déduit donc que $v_n = 2 \times 3^n - 1$ et donc $u_n = \dfrac{1}{2 \times 3^n - 1}$.

Correction de l'exercice 2 :

1.
```
def suite(n,a,b):
    L=[a,b]
    for k in range(2,n+1):#ou range(n-1)
        L.append(L[-1]/2-L[-2]/4+1/2)
    return L
```
2. a) On cherche une suite telle $u_n = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et u vérifie la relation (E).
   On doit donc avoir $4c - 2c + c = 2$, c'est-à-dire $c = \dfrac{2}{3}$.
   La seule suite constante vérifiant la relation (E) est donc la suite telle que $u_n = \dfrac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b) On pose donc $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$. On a :
$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 2 \\ &\text{et } 4 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 \\ \text{donc,} \quad &\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4\left(u_{n+2} - \frac{2}{3}\right) - 2\left(u_{n+1} - \frac{2}{3}\right) + \left(u_n - \frac{2}{3}\right) = 0 \\ \Rightarrow \quad &\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0. \end{aligned}$$
   La suite (v_n) vérifie bien une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

   c) On considère l'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :
$$4x^2 - 2x + 1 = 0.$$
   Les solutions de cette équation sont $\dfrac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   On sait donc que la suite v_n est de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(A\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right),$$
   où A et B sont des constantes réelles.
   On utilise les premiers termes de la suite pour déterminer A et B :
$$\begin{cases} v_0 = A \\ v_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = u_0 - \dfrac{2}{3} \\ B = \dfrac{4u_1 - u_0 - 2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$
   On a donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{1}{2^n}\left(\left(u_0 - \frac{2}{3}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \frac{4u_1 - u_0 - 2}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right) + \frac{2}{3}.$$

Correction de l'exercice 3 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = 3A + 4I$.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI$ ».

— Pour $n=0$: par convention $A^0 = I$. Donc en prenant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, on a bien $A^0 = a_0 A + b_0 I$. $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
On a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = (a_n A + b_n I)A \\ &= a_n A^2 + b_n A = (3a_n + b_n)A + 4a_n I \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 4a_n$, on a bien prouvé l'existence de deux réels tels que $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

— Grâce au principe de récurrence, on a prouvé que pour tout entier n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question précédente :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} + 4a_n.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
On considère l'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Les solution de cette équation sont -1 et 4. On sait donc que la suite a_n est de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = A(-1)^n + B4^n,$$

où A et B sont des constantes réelles.
On se sert alors des premiers termes $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ pour déterminer A et B :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = A + B \\ a_1 = -A + 4B \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -A \\ A = -\dfrac{1}{5} \end{array} \right. .$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{5}\left(4^n - (-1)^n\right)$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 4a_{n-1} = \dfrac{4}{5}\left(4^{n-1} - (-1)^{n-1}\right)$. On peut remarquer que cette relation est encore vraie pour $n = 0$.
En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{5}\left(4^n - (-1)^n\right)A + \frac{4}{5}\left(4^{n-1} - (-1)^{n-1}\right)I.$$

Correction de l'exercice 4 :

1. On a tout d'abord $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{-n^2} = \exp\left(-n^2 \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+4}\right)\right)$.

   On remarque alors que $\dfrac{n^2+1}{n^2+4} \sim \dfrac{n^2}{n^2} = 1$.

   On a donc $\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+4}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2+1}{n^2+4} - 1 = \dfrac{-3}{n^2+4}$.

   Cela nous permet donc d'obtenir : $-n^2 \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+4}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^2 \times \dfrac{-3}{n^2} = 3$.

   En conclusion, par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{-n^2} = e^3$.

2. On sait que pour tout réel x, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
   Donc, pour tout entier k :

$$\frac{k^2}{4} - 1 < \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor \leqslant \frac{k^2}{4}.$$

   Par somme d'inégalités, pour tout entier N non nul :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{4} - \sum_{k=1}^{N} 1 < \sum_{k=1}^{N} \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{4} \\ \Rightarrow &\frac{N(N+1)(2N+1)}{24} - N < \sum_{k=1}^{N} \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor \leqslant \frac{N(N+1)(2N+1)}{24} \\ \Rightarrow &\frac{N(N+1)(2N+1)}{24N^3} - \frac{1}{N^2} < S_N \leqslant \frac{N(N+1)(2N+1)}{24N^3}. \end{aligned}$$

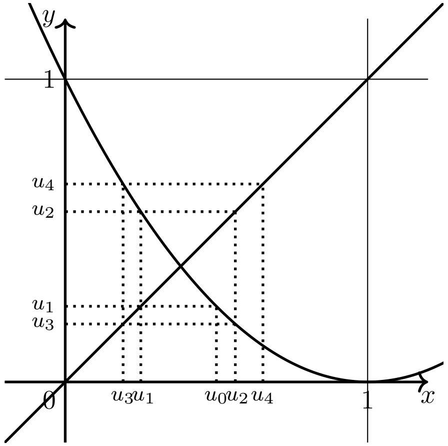
   Or, $\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{24N^3} \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{2N^3}{24N^3} = \dfrac{1}{12}$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N^2} = 0$.

   Ainsi, par encadrement de limites, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \dfrac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. La fonction f est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2(1-x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



2. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \in [0;1]$ », est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   D'après l'énoncé $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0;1]$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
   On a alors, par opérations sur les inégalités, $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$ donc, par croissance de la fonction carré sur $[0;1]$, $0 \leqslant (1-u_n)^2 \leqslant 1$, ce qui signifie que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Grâce au principe de récurrence nous avons montré que $u_n \in [0;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $v_n \leqslant v_{n+1}$ », est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On sait que $v_0 = u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = u_2 = f \circ f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{9}{16}$. On a donc $v_1 > v_0$, et ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Il est astucieux de remarquer ici que, pour tout entier n, $v_{n+1} = u_{2n+2} = (f \circ f)(v_n)$.
   La fonction f étant décroissante sur $[0;1]$, on sait que $f \circ f$ est croissante sur $[0;1]$.
   On peut donc écrire :
$$v_n \leqslant v_{n+1} \Longrightarrow (f \circ f)(v_n) \leqslant (f \circ f)(v_{n+1}) \Leftrightarrow v_{n+1} \leqslant v_{n+2}.$$
   Donc on a montré que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Grâce au principe de récurrence nous avons montré que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée (par 1), elle est convergente.
   Notons ℓ sa limite. Comme cette suite est croissante on sait que $\ell \geqslant v_0 = u_0 = \dfrac{1}{2}$.
   b) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $w_n \geqslant w_{n+1}$ », est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On sait que $w_0 = u_1 = \dfrac{1}{4}$ et $w_1 = u_3 = f \circ f(u_1) = f\left(\dfrac{9}{16}\right) = \dfrac{49}{256}$. On a donc $w_1 < w_0$, et ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Il est encore une fois astucieux de remarquer ici que, pour tout entier n, $w_{n+1} = u_{2n+3} = (f \circ f)(w_n)$.
   De même que dans la question précédente, on peut donc écrire :
$$w_n \geqslant w_{n+1} \Longrightarrow (f \circ f)(w_n) \geqslant (f \circ f)(w_{n+1}) \Leftrightarrow w_{n+1} \geqslant w_{n+2}.$$
   Donc on a montré que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Grâce au principe de récurrence nous avons montré que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée (par 0), elle est convergente.
   Notons ℓ' sa limite. Comme cette suite est décroissante on sait que $\ell' \leqslant w_0 = u_1 = \dfrac{1}{4}$.
   c) On remarque que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers deux limites qui, même si nous ne connaissons par leurs valeurs, sont distinctes car $\ell' \leqslant \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2} \leqslant \ell$.
   On peut donc affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Correction de l'exercice 6 :

1. La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ($g'(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2} - 1 < 0$) donc, d'après le théorème de bijection monotone, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   Comme $0 \in \mathbb{R}$, 0 admet un unique antécédent par g, ce qui signifie qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = x$.
   De plus, $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \mathrm{e}^{-1/2} - 1 < 0$, donc $\alpha \in [0;1]$.
2. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in [0;1]$ » est vraie pour tout entier n.
   $\mathscr{P}(0)$ est vraie grâce à l'énoncé.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
   u_{n+1} existe bien car le calcul de $\mathrm{e}^{-u_n/2}$ ne pose pas de problème.
   De plus $0 \leqslant u_n \leqslant 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{u_n}{2} \leqslant 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-1/2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, par croissance de la fonction exponentielle.
   Donc $u_{n+1} \in [0;1]$ et ainsi $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   Grâce au principe de récurrence on a montré que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.
3. Supposons que (u_n) converge vers ℓ. Par continuité de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-u_n/2} = \mathrm{e}^{-\ell/2}$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
   Par unicité de la limite, on a donc $\ell = \mathrm{e}^{-\ell/2} \Leftrightarrow f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = \alpha$.
   Si la suite (u_n) converge, elle converge vers α.

4. La fonction f est continue et dérivable sur $[0;1]$ et u_n et α appartiennent à $[0;1]$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre u_n et α tel que :
$$f'(c) = \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha}.$$
Or $|f'(c)| = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-c/2} \leqslant \frac{1}{2}$.
Donc $\left|\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui donne, en multipliant par $|u_n - \alpha|$ qui est positif, le résultat attendu.
5. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ » est vraie pour tout entier n.
<u>Pour $n = 0$:</u> On a $|u_0 - \alpha| = \alpha$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
<u>Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.</u>
D'après la question précédente et $\mathscr{P}(n)$ on a :
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$
$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vérifiée.
Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout entier n, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
6. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Par encadrement de limites, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
7. Il faut, dans cette question, écrire un programme python qui calcule et affiche un réel u_n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$. Comme on ne connait pas α, on se sert de la question précédente et on cherche en fait n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-3}$.
<u>Première méthode : avec boucle `while`</u>
```
from math import exp

u=0
v=1
while v>10**(-3):
    u=exp(-u/2)
    v=v*1/2
print(u)
```
<u>Deuxième méthode : en calculant n d'abord</u>
$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow n \geqslant \frac{3\ln(10)}{\ln(2)}$. On va donc écrire un programme qui calcule et affiche u_{n_0} avec $n_0 = \left\lfloor \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$.
```
from math import exp,log

u=0
n0=int(3*log(10)/log(2))+1
for k in range(n0): # pour arriver jusqu'à u_{n0}
    u=exp(-u/2)
print(u)
```

Correction de l'exercice 7 :

1. Pour tout entier n :
$$C_n + \mathrm{i}S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n.$$
2. L'objet de la question est donc de déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n$. On utilise pour cela une astuce classique qui consiste à mettre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}$.
$$\begin{aligned}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2})^n \\ &= 2^n \cos^n(x/2)(\cos(nx/2) + \mathrm{i}\sin(nx/2))\end{aligned}$$
Par unicité de la partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe on en déduit que :
$$C_n = 2^n \cos^n(x/2)\cos(nx/2) \qquad \text{et} \qquad S_n = 2^n \cos^n(x/2)\sin(nx/2).$$

Correction de l'exercice 8 :

$$\begin{aligned}S = \sum_{k=3}^{2n} \left(2^{3k+1} \times \frac{4^{k+1}}{\mathrm{e}^{2k+1}}\right) &= \frac{8}{\mathrm{e}} \sum_{k=3}^{2n} \left(\frac{32}{\mathrm{e}^2}\right)^k \\ &= \frac{8}{\mathrm{e}} \times \left(\frac{32}{\mathrm{e}^2}\right)^3 \times \frac{1 - \left(\frac{32}{\mathrm{e}^2}\right)^{2n-2}}{1 - \frac{32}{\mathrm{e}^2}} \qquad \text{car } \frac{32}{\mathrm{e}^2} \neq 1 \\ &= \frac{8 \times 32^3}{\mathrm{e}^5(\mathrm{e}^2 - 32)} \left(1 - \left(\frac{32}{\mathrm{e}^2}\right)^{2n-2}\right)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9 :

1. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $P_n > 0$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Pour $n = 0$: d'après l'énoncé $P_n > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
     On a alors $P_{n+1} = \dfrac{\rho}{P_n + K} P_n$. Comme $P_n > 0$, $\rho > 0$, $K > 0$, on a bien $P_{n+1} > 0$.
     $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vérifiée.
   - Grâce au principe de récurrence, on a prouvé que pour tout entier n, $P_n > 0$.

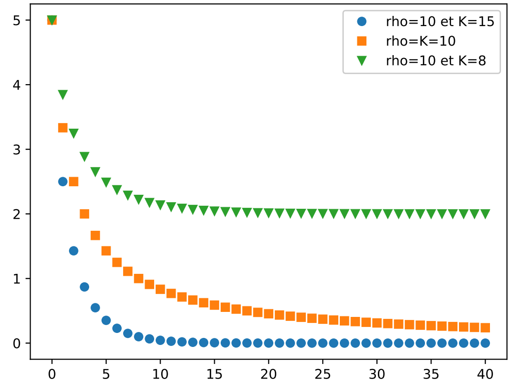
   En conclusion, aucun terme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est nul.
2. Pour tout entier n, $Q_{n+1} = \dfrac{1}{P_{n+1}} = \dfrac{P_n + K}{\rho P_n} = \dfrac{1}{\rho} + \dfrac{K}{\rho} Q_n$.
   La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien arithmético-géométrique.
   À l'aide de la méthode usuelle, on trouve, si $\rho \neq K$,
   $$Q_n = \left(\frac{K}{\rho}\right)^n \left(Q_0 - \frac{1}{\rho - K}\right) + \frac{1}{\rho - K}.$$
   Et si $\rho = K$, $Q_n = Q_0 + \dfrac{n}{\rho}$.
3. Si $K > \rho$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$.
   Si $K < \rho$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = \dfrac{1}{\rho - K}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \rho - K$.
   Si $K = \rho$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$.
4.
```
import matplotlib.pyplot as plt

def Pn(n,P0,rho,K):
    '''étant donné un entier n et les valeurs de P_0, rho et K,
    renvoie une liste contenant les n+1 premières valeurs de P_n'''
    L=[P0]
    for k in range(n):
        L.append(L[k]*rho/(L[k]+K))
    return L

N=[n for n in range(41)]

Liste1=Pn(40,5,10,15)
plt.plot(N,Liste1,'o',label='rho=10 et K=15')
Liste2=Pn(40,5,10,10)
plt.plot(N,Liste2,'s',label='rho=K=10')

Liste3=Pn(40,5,10,8)
plt.plot(N,Liste3,'v',label='rho=10 et K=8')
plt.legend()
plt.show()
```



Correction de l'exercice 10 :

1. Récurrence
2.
```
def U(u0,n):
    u=u0
    for k in range(n):
        u=(u+u**3)/2
    return u
```
3. a) $f'(x) = \dfrac{1+3x^2}{2} > 0$ donc f est strictement croissante.

   b) $f(x) - x = \dfrac{x^3 - x}{2} = \dfrac{x(x^2-1)}{2}$.
   Donc $f(x) - x$ est positif sur $[1; +\infty[$ et négatif sur $[0; 1]$.
4. ℓ doit être un point fixe de f et ℓ doit être positif. Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.
5. a) Si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$ la suite (u_n) est constante.

   b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

Une récurrence facile permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1[$.
Donc $f(u_n) - u_n \leqslant 0$ et donc (u_n) est décroissante.
(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. D'après la question précédente sa limite est soit 0 soit 1 mais comme la suite est décroissante et que $u_0 < 1$ alors (u_n) converge vers 0.

6. Récurrence pour montrer que $u_n > 1$.
Donc $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$ et la suite (u_n) est donc croissante.
Si la suite (u_n) était convergente elle convergerait vers 0 ou 1 ce qui est impossible car (u_n) est croissante et $u_0 > 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 11 :

1. (u_n) est une suite arithmético-géométrique. Donc $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(u_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
2. On remarque que $f(u_{n+1}) = f(u_n)$ pour tout n.
Donc pour tout n, $f(u_n) = f(u_0)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et sachant que f est continue on a $f(1/2) = f(u_0)$.
Ceci étant valable quelle que soit la valeur de u_0 on peut dure que pour tout réel x, $f(x) = f(1/2)$ donc f est constante.

Correction de l'exercice 12 :

On pose $v_n = \ln(u_n) - c$. On a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \ln(u_{n+2}) - c = \ln(k) + \ln(u_{n+1}) + 2\ln(u_n) - c \\ &= \ln(k) + v_{n+1} + c + 2(v_n + c) - c \\ &= v_{n+1} + 2v_n + \ln(k) + 2c \end{aligned}$$

Il est alors judicieux de choisir $c = -\frac{1}{2}\ln(k)$, car on a alors $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.

On trouve alors $v_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$ et on en déduit que $u_n = \frac{1}{\sqrt{k}} A^{(-1)^n} B^{2^n}$.

On a de plus $A = \left(\frac{u_0^2\sqrt{k}}{u_1}\right)^{1/3}$ et $B = (u_0 u_1 k)^{1/3}$.

Correction de l'exercice 13 :

On pose $v_n = \ln(u_n)$. On a alors

$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2}$$

Donc $v_n = a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $u_n = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{b(-1/2)^n} = AB^{(1/2)^n}$

Avec u_0 et u_1 on obtient $A = (u_0 u_1^2)^{1/3}$ et $B = \left(\frac{u_0}{u_1}\right)^{2/3}$.