Exercices : Applications linéaires

Pour commencer...

Exercice 1 : Faire ses gammes

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier votre réponse.

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0), P''(0)) \end{array}$.
2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$.
3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(1)(X-1) + XP' \end{array}$.
4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MU + M^T U \end{array}$ ($U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixée).

Exercice 2 :

Soit f l'application définie sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ($p \geqslant 2$) par $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=1}^{p} x_k$.

On admet que $\dim(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})) = p$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Si cela est possible, déterminer une base du noyau de f. f est-elle injective ?
3. L'application f est-elle surjective ?
4. On note g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ définie par $g(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Que remarquez-vous ?

Exercice 3 :

Soit f l'application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_2[X]$ définie par :

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a(X - \mathrm{i})^2 + b(X + \mathrm{i})^2 + c(X - \mathrm{i}) + d(X + \mathrm{i}).$$

On admet que $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})) = 4$. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

Isomorphismes en dimension finie

Exercice 4 : Faire ses gammes

Les applications linéaires suivantes sont-elles bijectives ? Justifier vos réponses.

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & (X^2 - 1)P'' + XP' \end{array}$.
2. $g : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + M^T J \end{array}$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & \left(P(2), P'(2), P''(2), P^{(3)}(2)\right) \end{array}$.

Exercice 5 :

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 des éléments de $\mathbb{R}$ distincts deux à deux. Soit f l'application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(a_1) & P(a_2) \\ P(a_3) & P(a_4) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que f est injective.
3. On admet que $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$. Montrer que f est bijective.
4. Déterminer $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ puis $f^{-1}(I_2)$.

Exercice 6 :

Soient E, F et G trois espaces vectoriels.

1. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G telles que $g \circ f = \mathrm{id}_{E,G}$.
   a) Montrer que f est injective. Est-elle surjective ?
   b) Montrer que g est surjective. Est-elle injective ?
2. On reprend les hypothèses de la question précédentes et on ajoute quelques hypothèses : f et g sont des applications linéaires et E, F et G sont des espaces de dimension finie et tous de même dimension.

   Que peut-on dire des applications f et g ?

Matrices et applications linéaires

Exercice 7 : Faire ses gammes

Les réponses seront rigoureusement justifiées.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (x+y-z, 2y, -x+y+z).$$
Déterminer la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ définie par :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = x(X-2)^2 + y(X-2)(X-1) + z(X-1)^2.$$
Déterminer la matrice de f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^5)$ définie par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = (x-y, 3x, 2y-3x, -y, x+y).$$
Déterminer la matrice de f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^5$.
4. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ définie par :
$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \qquad f(x,y,z,t) = 2x-3y+4t.$$
Déterminer la matrice de f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \qquad f(P) = (X^2-1)P'' + XP'.$$

1. Déterminer la matrice A de f relative à la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On note $Q_0 = X$, $Q_1 = 4X^3 - 3X$, $Q_2 = 1$ et $Q_3 = -2X^2 + 1$ et on admet que
   a) Justifier que $\mathscr{B} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   b) Déterminer la matrice D de f relative à la base $\mathscr{B}$.
3. Quelle relation a-t-on entre A et D ?

Exercice 9 : Faire ses gammes

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer, si possible, une base du noyau et de l'image de l'application linéaire g de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice relative aux bases canoniques des deux espaces est $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On admet que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer une base de l'image et du noyau de l'endomorphisme g de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dont la matrice relative à la base $\mathscr{B}$ est $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 :

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0$ (id *désigne l'application identité de* $\mathbb{R}_2[X]$).
2. En déduire que f est un isomorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f et id .
3. Calculer $f^{-1}(X^2+1)$.

On mélange tout et on complique un peu !

Exercice 11 :

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, X^2)$ ainsi que l'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ définie par :
$$f(1) = (1,0) \quad f(X) = (2,-1) \quad f(X^2) = (-3,1).$$

1. Sans calculer $f(P)$ pour P quelconque, déterminer une base et la dimension de $\ker(f)$.
2. L'application f est-elle bijective ?
3. Expliciter $f(P)$ pour P polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 12 : Matrices semblables

On définit les deux matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que les matrices T et L sont semblables. Il faudra essayer de retenir la méthode employée dans cet exercice.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice T dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer un vecteur u_1 dont la première coordonnée dans la base canonique est égale à 1 et tel que $f(u_1) = u_1$.
2. Déterminer un vecteur u_2 non nul et tel que $f(u_2) = u_1 + u_2$.
3. Déterminer une base du noyau de f.
4. Montrer que T et L sont semblables.
   Indication : on pourra s'intéresser à la matrice représentative de f dans une base construite à l'aide des questions précédentes.

Exercice 13 :

On note $\mathscr{B}_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_c$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. À l'aide de la matrice A déterminer si l'application f est bijective.
2. Déterminer une base et la dimension de $E_1 = \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]})$. On notera $\mathscr{B}_1$ cette base.
3. Déterminer une base et la dimension de $E_{-1} = \ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]})$. On notera $\mathscr{B}_2$ cette base.
4. On note $\mathscr{B}$ la famille obtenue en réunissant les vecteurs de $\mathscr{B}_1$ suivi de ceux de $\mathscr{B}_2$.
   a) Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b) Déterminer la matrice D de f relative à la base $\mathscr{B}$.
5. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$.
   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Il ne sera pas utile d'expliciter la matrice P.

Exercice 14 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Φ l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+2) - P(X) \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. a) Soit $P \in \ker(\Phi)$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$. Montrer à l'aide du théorème de D'Alembert que P admet une infinité de racines.
   b) Conclure que $\ker(\Phi) = \mathbb{C}_0[X]$.
3. En déduire que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Exercice 15 :

Soient S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite appartenant à S telle que $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_2 = 2$.

1. Déterminer les racines α, β et γ de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
2. a) Montrer que S est un espace vectoriel, puis que les suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de S.
   b) Soit f l'application qui à tout élément u de S associe $f(u) = (u_0, u_1, u_2)$. Montrer que f est un isomorphisme de S dans $\mathbb{R}^3$.
   c) En déduire la dimension de S puis une base de S.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de w_n en fonction de n.

Un peu d'abstraction

Exercice 16 : Oral Agro-véto modifié

1. Préliminaire informatique :
   Écrire une fonction Python **powmat(A,m)** qui renvoie la matrice A à la puissance m-ième. On pourra utiliser la fonction **numpy.dot(M,N)** qui renvoie le produit MN sous forme de tableau (array).

   Soit $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

   Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E.
   Soit f_a l'endomorphisme de E représenté par la matrice $M(a)$dans la base $\mathscr{B}$.
2. a) Quel est le rang de $M(a)$? Discuter selon la valeur de a.
   b) Déterminer une base du noyau de f_a. Discuter selon la valeur de a.
3. On pose :
   $$\begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} \end{cases}$$
   a) Montrer que $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{w})$ est une base de E.
   b) Calculer $f_a(\overrightarrow{u})$ et $f_a(\overrightarrow{w})$.
   c) En déduire une matrice P et une matrice D_a diagonale telles que $M(a) = PD_aP^{-1}$.
4. On prend dans cette partie $a = -2$.
   a) La famille $(M(-2), M(-2)^3)$ est-elle libre ?
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter $M(-2)^n$.

Exercice 17 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel.

1. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B}_f = (x_1, \ldots, x_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathscr{B}_g = (y_1, \ldots, y_k)$ une base de $\mathrm{Im}(g)$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_k)$.
   b) En déduire que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
   c) À l'aide de l'inégalité précédente, montrer que $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$.
2. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g$ est bijectif.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.
   b) Montrer alors que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.

Exercice 18 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
2. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker(f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$
3. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Im}(f) + \ker(g) = E$.
   On définit la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G par
   $$F + G = \{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} / \overrightarrow{x} \in F \text{ et } \overrightarrow{y} \in G\}.$$

Exercice 19 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est de dimension $n \geqslant 1$. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 1$ tel que $f^k = 0$.

1. Montrer que f n'est pas bijective.
2. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$ et $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   a) Montrer que $\left(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille libre.
   b) En déduire que $p \leqslant n$.

Exercice 20 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = 0$.

On suppose, de plus, qu'il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ tels que la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.

1. Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant n$.
2. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
3. Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

Correction

Correction de l'exercice 1 :

1. Soient Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et a un réel. On a :

$$\begin{aligned}
f_1(aQ+R) &= ((aQ+R)(0),(aQ+R)'(0),(aQ+R)''(0)) \\
&= (aQ(0)+R(0),aQ'(0)+R'(0),aQ''(0)+R''(0)) \\
&= a(Q(0),Q'(0),Q''(0))+(R(0),R'(0),R''(0)) \\
&= af_1(Q)+f_1(R)
\end{aligned}$$

Donc f_1 est une application linéaire.

2. On a $\det(2I_2)=\det\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=4$ et $2\det(I_2)=2$. Donc $f_2(2I_2)\neq 2f_2(I_2)$.
f_2 n'est pas une application linéaire.

3. Soient Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et a un réel. On a :

$$\begin{aligned}
f_3(aQ+R) &= (aQ+R)(1)(X-1)+X(aQ+R)' \\
&= (aQ(1)+R(1))\,(X-1)+X(aQ'+R') \\
&= a\,(Q(1)(X-1)+XQ')+R(1)(X-1)+XR' \\
&= af_3(Q)+f_3(R)
\end{aligned}$$

Donc f_3 est une application linéaire.

4. Soient K et L deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et a un réel. On a :

$$\begin{aligned}
f_4(aK+L) &= (aK+L)U+(aK+L)^TU \\
&= aKU+LU+aK^TU+L^TU \qquad \text{par linéarité de la transposition} \\
&= af_4(K)+f_4(L)
\end{aligned}$$

Donc f_4 est une application linéaire.

Correction de l'exercice 2 :

1. Soient $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $a\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(aX+Y) = f\left(\begin{pmatrix}ax_1+y_1\\ \vdots\\ ax_p+y_p\end{pmatrix}\right) &= \sum_{k=1}^{p}(ax_k+y_k) \\
&= a\sum_{k=1}^{p}x_k+\sum_{k=1}^{p}y_k \\
&= af(X)+f(Y)
\end{aligned}$$

L'application f est bien linéaire.

2. Afin de déterminer si f est injective déterminons son noyau. Par définition

$$\begin{aligned}
\ker(f) &= \{X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})/f(X)=0\} \\
&= \{X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})/x_1+\ldots+x_p=0\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{p-1}\\ -x_1-\ldots-x_{p-1}\end{pmatrix}/(x_1,\ldots,x_{p-1})\in\mathbb{R}^{p-1}\right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

On peut facilement montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, qui est génératrice de $\ker(f)$, est libre.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(f)$.

On voit donc que $\ker(f)\neq\{0\}$ ainsi, f n'est pas injective.

3. Deux méthodes pour déterminer si f est surjective.
   — Méthode 1 : f est une application de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Il nous faut donc déterminer si tout élément de $\mathbb{R}$ admet un antécédent par f.

   Soit $a\in\mathbb{R}$. On peut facilement remarquer que $a=f\left(\begin{pmatrix}a\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right)$.

   Donc tout élément de $\mathbb{R}$ admet un antécédent par f ce qui signifie que f est surjective.

— <u>Méthode 2 :</u> On sait que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.
Or $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1 donc ses seuls sous-espace vectoriels sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

On peut facilement remarquer que $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ car par exemple $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right) = 1 \neq 0$.
Donc on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\begin{pmatrix}x\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right) = x + 0 + \ldots + 0 = x.$$

On a donc $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
On peut remarquer que même s'il existe une fonction g telle que $f \circ g = \mathrm{id}$, la fonction f n'est pas pour autant bijective !!

Correction de l'exercice 3 :

Commençons par déterminer une base du noyau de f :

$$\begin{aligned}
& f\left(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\right) = 0\\
\Leftrightarrow & a(X-\mathrm{i})^2 + b(X+\mathrm{i})^2 + c(X-\mathrm{i}) + d(X+\mathrm{i}) = 0\\
\Leftrightarrow & (a+b)X^2 + (-2a\mathrm{i} + 2b\mathrm{i} + c + d)X - a - b - \mathrm{i}c + \mathrm{i}d = 0\\
\Leftrightarrow & \begin{cases} a + b = 0\\ -2a\mathrm{i} + 2b\mathrm{i} + c + d = 0\\ -a - b - \mathrm{i}c + \mathrm{i}d = 0\end{cases}\\
\Leftrightarrow & \begin{cases} b = -a\\ -4a\mathrm{i} + 2c = 0\\ d = c\end{cases}\\
\Leftrightarrow & \begin{cases} b = -a\\ c = 2\mathrm{i}a\\ d = 2\mathrm{i}a\end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \left\{\begin{pmatrix}a & -a\\2\mathrm{i}a & 2\mathrm{i}a\end{pmatrix} / a \in \mathbb{C}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\2\mathrm{i} & 2\mathrm{i}\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\2\mathrm{i} & 2\mathrm{i}\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\ker(f)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc un base de $\ker(f)$.

Comme $\dim(\ker(f)) = 1$, d'après le théorème du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})) - \dim(\ker(f)) = 3.$$

Or $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{C}_2[X]$ et $\dim(\mathbb{C}_2[X]) = 3$.

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}_2[X]$ et $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 4 :

1. *Astuce : si on remarque tout de suite que $f(1) = 0$ on peut dire que f n'est pas injective et donc pas bijective !*

   Comme f est un endomorphisme et que $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension finie, dire que f est bijective est équivalent à dire qu'elle est injective. Déterminons donc le noyau de f.

   Par définition $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / f(P) = 0\}$. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(P) = 0 &\Leftrightarrow (X^2 - 1)(6aX + 2b) + X(3aX^2 + 2bX + c) = 0\\
&\Leftrightarrow 9aX^3 + 4bX^2 + (-6a + c)X - 2b = 0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 9a = 0\\ 4b = 0\\ -6a + c = 0\\ -2b = 0\end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0
\end{aligned}$$

   Donc $\ker(f) = \{d / d \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$ et f n'est donc pas injective et ainsi, pas bijective.

2. Comme g est un endomorphisme et que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie *(on peut facilement trouver une famille génératrice finie)*, dire que g est bijective est équivalent à dire qu'elle est injective. Déterminons donc le noyau de g.

   Par définition $\ker(g) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / g(M) = 0\}$. Soit $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a alors

$$g(M)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & a+b+c\\ b+c+d & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+c=0\\ a+b+c=0\\ b+c+d=0\\ b+2d=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-2a\\ -a-2d=0\\ -2a-d=0\\ b=-2d\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-2a\\ 3a=0\\ d=-2a\\ b=-2d\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=d=0$$

Donc $\ker(g)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

g est donc injective et comme c'est un endomorphisme en dimension finie, on peut en déduire qu'elle est bijective.

3. On peut remarquer que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Comme, de plus, h est une application linéaire, dire que h est bijective est équivalent à dire qu'elle est injective. Pour cela déterminons le noyau de h.

   Par définition $\ker(h) = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / h(P) = 0\}$.

   Pour résoudre $h(P) = 0$, écrivons P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a alors :
$$h(P)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+4b+2c+d=0\\ 12a+4b+c=0\\ 12a+2b=0\\ 6a=0\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=d=0.$$

   Ainsi, $\ker(h) = \{0\}$ et h est donc injective.

   On peut en déduire que h est bijective.

Correction de l'exercice 5 :

1. Soient Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :
$$\begin{aligned} f(Q+\lambda R) &= \begin{pmatrix} (Q+\lambda R)(a_1) & (Q+\lambda R)(a_2)\\ (Q+\lambda R)(a_3) & (Q+\lambda R)(a_4)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} Q(a_1)+\lambda R(a_1) & Q(a_2)+\lambda R(a_2)\\ Q(a_3)+\lambda R(a_3) & Q(a_4)+\lambda R(a_4)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} Q(a_1) & Q(a_2)\\ Q(a_3) & Q(a_4)\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} R(a_1) & R(a_2)\\ R(a_3) & R(a_4)\end{pmatrix}\\ &= f(Q)+\lambda f(R)\end{aligned}$$

   f est donc bien une application linéaire.

2. Montrons que $\ker(f) = \{0\}$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$:
$$f(P)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P(a_1) & P(a_2)\\ P(a_3) & P(a_4)\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(a_1)=0\\ P(a_2)=0\\ P(a_3)=0\\ P(a_4)=0\end{cases}.$$

   On peut reformuler cela en disant $f(P) = 0$ si, et seulement si, P admet a_1, a_2, a_3, a_4 pour racines. Or P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 donc le seul polynôme qui admet 4 racines distinctes est le polynôme nul.

   Ainsi, $f(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$. En conclusion, $\ker(f) = \{0\}$ ce qui signifie que f est injective.

3. On sait que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et f est une application linéaire injective, donc f est bijective.

4. Notons $Q = f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$. En utilisant la définition d'une bijection réciproque on peut écrire :
$$Q=f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow f(Q)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(a_1)=1\\ Q(a_2)=0\\ Q(a_3)=0 Q(a_4)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q(a_1)=1\\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\quad Q=\alpha(X-a_2)(X-a_3)(X-a_4)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)=1\\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\quad Q=\alpha(X-a_2)(X-a_3)(X-a_4)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}\\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\quad Q=\alpha(X-a_2)(X-a_3)(X-a_4)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow Q=\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}(X-a_2)(X-a_3)(X-a_4)$$

Pour éviter de faire trop de calculs pour $f^{-1}(I_2)$, il faut remarquer que f^{-1} est une application linéaire et que $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(I_2) &= f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(X-a_2)(X-a_3)(X-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} + \frac{(X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

1. a) Pour tout $(x,y) \in E^2$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) && \text{en appliquant la fonction } g \\ &\Rightarrow x = y && \text{car } g \circ f = \mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que f est injective.

L'application f n'est pas forcément surjective : on considère $g : (x,y) \mapsto x+y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $f : x \mapsto (x,0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

On a $g \circ f = \mathrm{id}$ mais f n'est pas surjective car $(0,1)$ n'a pas d'antécédent par f.

   b) Pour tout $z \in G$, on a $z = (g \circ f)(z) = g(f(z))$. z admet donc un antécédent par l'application g.

L'application g est donc surjective.

L'application g n'est pas forcément injective : on reprend l'exemple précédent.

On a $g \circ f = \mathrm{id}$ mais g n'est pas injective car $g(1,0) = g(0,1)$ par exemple.

2. En ajoutant le fait que f et g sont linéaires et que tous les espaces sont de dimension finie et de même dimension, on peut affirmer que f et g sont bijectives et que $f^{-1} = g$ car dans ce cas on a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Correction de l'exercice 7 :

1. Notons $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a alors

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,0,-1) = 1 \times e_1 + 0 \times e_2 + (-1) \times e_3 \\ f(e_2) &= (1,2,1) = 1 \times e_1 + 2 \times e_2 + 1 \times e_3 \\ f(e_3) &= (-1,0,1) = (-1) \times e_1 + 0 \times e_2 + 1 \times e_3. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Notons $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que $\mathscr{B}_2 = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (X-2)^2 = 4 - 4X + X^2 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (X-2)(X-1) = 2 - 3X + X^2 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (X-1)^2 = 1 - 2X + X^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Notons $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}_2 = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On a :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = (1,3,-3,0,1) = g_1 + 3g_2 - 3g_3 + 0g_4 + g_5 \\ f(e_2) &= f(0,1) = (-1,0,2,-1,1) = -g_1 + 0g_2 + 2g_3 - g_4 + g_5 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Notons $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathscr{B}_2 = (1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2 = 2 \times 1 \\ f(e_2) &= -3 = (-3) \times 1 \\ f(e_3) &= 0 = 0 \times 1 \\ f(e_4) &= 4 = 4 \times 1. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 :

1. Soit $\mathscr{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$\begin{aligned} f(1) &= (X^2-1) \times 0 + X \times 0 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3 \\ f(X) &= (X^2-1) \times 0 + X \times 1 = X = 0 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3 \\ f(X^2) &= (X^2-1) \times 2 + X \times 2X = 4X^2 - 2 = (-2) \times 1 + 0 \times X + 4 \times X^2 + 0 \times X^3 \\ f(X^3) &= (X^2-1) \times 6X + X \times 3X^2 = 9X^3 - 6X = 0 \times 1 + (-6) \times X + 0 \times X^2 + 9 \times X^3 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

2. a) La famille (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est libre car constituée de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts. De plus $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.
Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

   b) On a :

$$\begin{aligned} f(Q_0) &= (X^2-1)Q_0'' + XQ_0' = X = 1Q_0 + 0Q_1 + 0Q_2 + 0Q_3 \\ f(Q_1) &= (X^2-1)Q_1'' + XQ_1' = 36X^3 - 27X = 9Q_1 = 0Q_0 + 9Q_1 + 0Q_2 + 0Q_3 \\ f(Q_2) &= (X^2-1)Q_2'' + XQ_2' = 0 = 0Q_0 + 0Q_1 + 0Q_2 + 0Q_3 \\ f(Q_3) &= (X^2-1)Q_3'' + XQ_3' = -8X^2 + 4 = 4Q_3 = 0Q_0 + 0Q_1 + 0Q_2 + 4Q_3 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. A et D sont deux matrices associées à f mais dans deux bases différentes. Notons P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_c$ à la base $\mathscr{B}$. D'après la formule de changement de base pour les endomorphisme on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) = P\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)P^{-1} \Longleftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

Correction de l'exercice 9 :

1. Notons $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}((x,y,z)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -17x + 10y = 0 \\ z = -5x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{17}{10}x \\ z = \dfrac{1}{10}x \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \left\{ \left(x, \dfrac{17}{10}x, \dfrac{1}{10}x\right) / x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}((10, 17, 1))$.

La famille $((10, 17, 1))$ est génératrice de $\ker(f)$ et est libre car formée d'un seul vecteur non nul donc c'est une base de $\ker(f)$ et $\dim(\ker(f)) = 1$.

D'après le théorème du rang, que l'on peut appliquer car $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, on a :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 2.$$

Il nous suffit de trouver une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ pour avoir une base de $\mathrm{Im}(f)$.

D'après la matrice de f, on a

$$f(e_1) = (3, 2, 5) \qquad \text{et} \qquad f(e_2) = (-2, -1, -3).$$

La famille $((3, 2, 5), (-2, -1, -3))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$ car formée de deux vecteurs visiblement non proportionnels, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} g(P) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c - b = 0 \\ 2c + 3a = 0 \\ -3c + b + a = 0 \\ a = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Donc $\ker(g) = \{0\}$.

Il n'est donc pas possible de déterminer une base de $\ker(g)$.

D'après le théorème du rang, que l'on peut appliquer car $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie,

$$\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker(g)) = 3 - 0 = 3.$$

De plus, d'après notre cours et la matrice de g, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(g) &= \mathrm{Vect}(g(1), g(X), g(X^2)) \\ &= \mathrm{Vect}(-3X^2 + 2X + 1, X^2 - 1, X^3 + X^2 + 3X). \end{aligned}$$

La famille $(-3X^2 + 2X + 1, X^2 - 1, X^3 + X^2 + 3X)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(g)$ et cette famille contient 3 vecteurs et $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 3$, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(g)$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. On a :

$$\begin{aligned}
f(M) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(M) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ \mathrm{i}b+c=0 \\ b-\mathrm{i}c=0 \\ a+d=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} d=-a \\ c=-\mathrm{i}b \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc $\ker(g) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\ker(g)$ et est libre car formée de deux vecteurs visiblement non proportionnels, donc c'est une base de $\ker(g)$.

D'après notre cours et la matrice de g, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(g) &= \mathrm{Vect}\left(g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), g\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(g)$ et est libre car formée de deux vecteurs visiblement non proportionnels, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(g)$.

Correction de l'exercice 10 :

1. D'après les propriétés des matrices associées aux applications linéaires on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f^2 - f - 2\,\mathrm{id}) &= (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f))^2 - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) - 2\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\mathrm{id}) \\
&= A^2 - A - 2I_3 \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f^2 - f - 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(0)$.
Par unicité de la matrice représentative d'une application linéaire, on a $f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0$.

2. D'après la question précédente, et parce que f est linéaire, on peut écrire :

$$f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0 \Leftrightarrow f \circ \frac{1}{2}(f - \mathrm{id}) = \frac{1}{2}(f - \mathrm{id}) \circ f = \mathrm{id}\,.$$

Donc f est une application linéaire bijective, c'est-à-dire un isomorphisme, et $f^{-1} = \dfrac{1}{2}(f - \mathrm{id})$.

3. D'après la question précédente, $f^{-1}(X^2+1) = \dfrac{1}{2}(f(X^2+1) - \mathrm{id}(X^2+1))$.
Or $\mathrm{id}(X^2+1) = X^2+1$ et comme f est linéaire, $f(X^2+1) = f(X^2) + f(1)$.
D'après la matrice associée à f on sait aussi que $f(X^2) = 1 - X$ et $f(1) = X^2 - X$, donc $f(X^2+1) = X^2 - 2X + 1$.
En conclusion, $f^{-1}(X^2+1) = -X$.

Correction de l'exercice 11 :

1. Par définition $\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / f(P) = (0,0)\}$.
On ne connait pas ici $f(P)$ pour P quelconque, mais la donnée de $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ nous permet d'écrire la matrice de f relatives aux bases canoniques $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc résoudre $f(P) = 0$, avec $P = aX^2 + bX + c$ en écrivant :

$$f(P)=(0,0)\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(P)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}((0,0))$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}c+2b-3a=0\\-b+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=a\\b=a\end{cases}.$$

On a donc $\ker(f)=\{aX^2+aX+a/a\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(X^2+X+1)$.
La famille (X^2+X+1) est génératrice de $\ker(f)$ et libre car elle ne contient qu'un seul vecteur non nul.
En conclusion, la famille (X^2+X+1) est une base de $\ker(f)$ et $\dim(\ker(f))=1$.

2. f ne peut pas être bijective car $\dim(\mathbb{R}_2[X])\neq\dim(\mathbb{R}^2)$.
3. On considère un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$. On sait que $P=aX^2+bX+c$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.
Comme f est une application linéaire :
$$\begin{aligned}f(P)&=f(aX^2+bX+c)=af(X^2)+bf(X)+cf(1)\\&=a(-3,1)+b(2,-1)+c(1,0)=(-3a+2b+c,a-b)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12 :

Notons $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On cherche $u_1=(1,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $f(u_1)=u_1$. On a
$$\begin{aligned}f(u_1)=u_1&\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(u_1)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(u_1)\\&\Leftrightarrow T\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}1+y+z=1\\y=y\\y=z\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=0\\y=z\end{cases}\Leftrightarrow y=z=0.\end{aligned}$$
On a donc $u_1=(1,0,0)$.
Si on est astucieux on peut s'épargner les calculs !

2. On cherche $u_2=(x,y,z)$ tel que $f(u_2)=u_1+u_2$:
$$f(u_2)=u_1+u_2\Leftrightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=x+1\\y=y\\y=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=1\\y=z\end{cases}.$$
On choisit alors $u_2=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *(le choix de x est libre).*
3. Par définition $\ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=(0,0,0)\}$. On a :
$$f(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\y=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-x\\y=0\end{cases}.$$
Donc $\ker(f)=\{(x,0,-x)/x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,0,-1))$.
La famille $((1,0,-1))$ est génératrice de $\ker(f)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul, donc c'est une base de $\ker(f)$.
4. On pose $u_3=(1,0,-1)$ et $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,u_3)$.
On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$ et :
$$\begin{aligned}\mathrm{rgMat}_{\mathscr{B}_c}(u_1,u_2,u_3)&=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}\\&=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad L_3\leftarrow L_3-L_2\\&=3\end{aligned}$$
Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(u_1,u_2,u_3)$ est inversible, ce qui signifie que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Enfin, comme on a $f(u_1)=u_1$, $f(u_2)=u_1+u_2$ et $f(u_3)=0$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=L.$$
T et L sont donc deux matrices représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes, donc, d'après la formule de changement de base, ces matrices sont semblables.

Correction de l'exercice 13 :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix} && \begin{matrix}L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2\\
&= 3.
\end{aligned}$$

   A est inversible donc f est bijective.

2. Par définition $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \{P \in \mathbb{R}_2[X]/(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]})(P) = 0\}$.

   En notant $P = a + bX + cX^2$ on a

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]})(P) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow (A - I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-4a + 2b + 2c = 0\\ -2a + 2c = 0\\ -2a + 2b = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}0 = 0\\ c = a\\ b = a\end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc $E_1 = \{a + aX + aX^2/a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1 + X + X^2)$.

   La famille $\mathscr{B}_1 = (1 + X + X^2)$ est génératrice de E_1 et libre car formée d'un seul vecteur non nul, donc c'est une base de E_1. De plus $\dim(E_1) = \mathrm{card}(\mathscr{B}_1) = 1$.

3. Par définition $\ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \{P \in \mathbb{R}_2[X]/(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]})(P) = 0\}$.

   En notant $P = a + bX + cX^2$ on a

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]})(P) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow (A + I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}-2a + 2b + 2c = 0\\ -2a + 2b + 2c = 0\\ -2a + 2b + 2c = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow a = b + c
\end{aligned}$$

   Donc $E_{-1} = \{b + c + bX + cX^2/(b, c) \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1 + X, 1 + X^2)$.

   La famille $\mathscr{B}_2 = (1 + X, 1 + X^2)$ est génératrice de E_{-1} et libre car formée de deux vecteurs visiblement non proportionnels, donc c'est une base de E_{-1}. De plus $\dim(E_{-1}) = \mathrm{card}(\mathscr{B}_2) = 2$.

4. $\mathscr{B} = (1 + X + X^2, 1 + X, 1 + X^2)$.

   a) Montrons que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B})$ est inversible :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rgMat}_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B}) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} && \begin{matrix}L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3\\
&= 3.
\end{aligned}$$

   $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B})$ est inversible donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   b) On a, d'après les questions 2. et 3. :

$$\begin{aligned}
f(1 + X + X^2) &= 1 + X + X^2\\
f(1 + X) &= -(1 + X)\\
f(1 + X^2) &= -(1 + X^2).
\end{aligned}$$

   Donc $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

5. Commençons par remarquer que, d'après la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathscr{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

   — On a d'une part $A^0 = I_3$ et d'autre part $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
   Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   — Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP{-1} \quad \text{d'après } \mathscr{P}(n) \text{ et la formule de changement de base} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \quad \text{car } PP^{-1} = I_3 \end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

   Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Correction de l'exercice 14 :

1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On sait que $\deg(P) \leqslant n$ donc P s'écrit sous la forme $\sum_k = 0^n a_k X^k$.

   On en déduit que $P(X+2) = \sum_k = 0^n a_k(X+2) +$. Comme $\deg((X+2)^k) = k$, on peut affirmer que $\deg(P(X+2)) \leqslant n$ et donc $\deg(\Phi(P)) \leqslant n$.
   Ainsi $\Phi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
   De plus, soient P et Q deux éléments de $\mathbb{C}_n[X]$ et λ un réel.
   Alors :
$$\begin{aligned} \Phi(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+2) - (P+\lambda Q)(X) \\ &= P(X+2) + \lambda Q(X+2) - P(X) + \lambda Q(X) \\ &= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q) \end{aligned}$$

   En conclusion Φ est une application linéaire de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. a) Si P a un degré supérieur ou égal à 1 alors d'après le théorème de D'Alembert P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Notons α une racines de P.
   Comme P appartient à $\ker(\Phi)$ on sait que $P(X+2) - P(X) = 0$ donc $P(\alpha+2) = P(\alpha) = 0$.
   Ainsi $\alpha + 2$ est une racine de P. Par récurrence on peut alors montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha + 2k$ est une racine de P.
   P admet alors une infinité de racines, ce qui est absurde car le seul polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul qui n'est pas de degré supérieur ou égal à 1.

   b) D'après la question précédente aucun polynôme de degré supérieur ou égal à 1 ne peut appartenir à $\ker(\Phi)$. Donc $\ker(\Phi) \subset \mathbb{C}_0[X]$.
   Réciproquement, soit P un polynôme de $\mathbb{C}_0[X]$. P est donc un polynôme constant : $P(X) = c$.
   Donc $\Phi(P) = P(X+2) - P(X) = c - c = 0$. Ainsi $P \in \ker(\Phi)$.
   En conclusion, $\ker(\Phi) = \mathbb{C}_0[X]$.

3. D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \dim(\mathbb{C}_n[X]) - \dim(\mathbb{C}_0[X]) = n+1-1 = n$.

   De plus, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_k \in \mathbb{C}$.

   On en déduit que :

$$\Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k(X+2)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n(X+2)^n - a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k((X+2)^k - X^k)$$

   On remarque que $\deg\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k((X+2)^k - X^k)\right) \leqslant n-1$.

   De plus $a_n(X+2)^n - a_nX^n = a_n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i 2^{n-i} - a_n X^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a_n 2^{n-i} X^i$.
   Donc $\deg(a_n(X+2)^n - a_nX^n) \leqslant n-1$.
   Par conséquent $\deg(\Phi(P)) \leqslant n-1$ et donc $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
   En conclusion, $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \dim(\mathbb{C}_{n-1}[X])$ donc $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Correction de l'exercice 15 :

1. On commence par trouver 1 comme racine évidente puis on factorise :

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2)$$

   Donc les racines sont $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = 2$.

2. a) — Montrons que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   S est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   La suite nulle vérifie bien la relation de récurrence donnée donc la suite nulle appartient à S et donc S n'est pas vide.
   Soit u et v deux suites appartenant à S et λ un réel.
   La suite $u + \lambda v$ vérifie alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (u+\lambda v)_{n+3} &= u_{n+3} + \lambda v_{n+3} \\ &= 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n + \lambda(2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n) \\ &= 2(u+\lambda v)_{n+2} + (u+\lambda v)_{n+1} - 2(u+\lambda v)_n \end{aligned}$$

Donc $u+\lambda v \in S$

En conclusion, S est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc S est un espace vectoriel.

— On remarque que :

$$2\times 1^{n+2}+1^{n+1}-2\times 1^n = 1 = 1^{n+3}.$$

Donc $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$.

De plus

$$\begin{aligned}2\times(-1)^{n+2}+(-1)^{n+1}-2\times(-1)^n &= 2\times(-1)^n-(-1)^n-2\times(-1)^n\\ &= -(-1)^n=(-1)^{n+3}.\end{aligned}$$

Donc $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$.

Et enfin

$$2\times 2^{n+2}+2^{n+1}-2\times 2^n = 2^{n+3}+2\times 2^n-2\times 2^n = 2^{n+3}.$$

Donc $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$.

— Pour finir, montrons que la famille $((\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}},(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}},(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.

Soient a, b et c trois réels tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n=0$$

En appliquant cela pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$, on obtient que a, b et c sont obligés de vérifier :

$$\begin{cases}a+b+c=0\\ a-b+2c=0\\ a+b+4c=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0.$$

Donc la famille $((\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}},(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}},(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.

b) — Montrons que f est une application linéaire.

Soient u et v deux éléments de S et λ un réel.

$$\begin{aligned}f(u+\lambda v) &= ((u+\lambda v)_0,(u+\lambda v)_1,(u+\lambda v)_2)\\ &= (u_0+\lambda v_0,u_1+\lambda v_1,u_2+\lambda v_2)\\ &= f(u)+\lambda f(v)\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

— Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ la donnée de :

$$\begin{cases}u_0=x\\ u_1=y\\ u_2=z\\ \forall n\in\mathbb{N} u_{n+3}=2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n\end{cases}$$

défini bien une suite de S.

Donc tout élément de $\mathbb{R}^3$ admet un antécédent dans S et donc f est surjective.

— Déterminons le noyau de f.

On cherche donc à résoudre $f(u)=(0,0,0)$, c'est-à-dire que l'on cherche les suites de S dont les trois premier termes sont nuls.

On suppose que $u\in S$ et $(u_0,u_1,u_2)=(0,0,0)$.

Il suffit alors de montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$. (*Je vous laisse le faire !!*).

Donc $f(u)=(0,0,0)\Longrightarrow u=0$. Ainsi $\ker(f)=\{0\}$ et donc f est injective.

En conclusion f est un isomorphisme de S dans $\mathbb{R}^3$.

c) D'après la question précédente et d'après notre cours, on peut affirmer que $\dim(S)=\dim(\mathbb{R}^3)=3$ (car S et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes).

Ainsi, la famille $((\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}},(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}},(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de S qui contient 3 vecteurs donc c'est une base de S.

3. D'après la question précédente, comme $w\in S$, on sait qu'il existe a, b et c trois réels tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad w_n=a\alpha^n+b\beta^n+c\gamma^n.$$

À l'aide des valeurs de w_0, w_1 et w_2, on trouve que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad w_n=-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}(-1)^n+\frac{2}{3}2^n.$$

Correction de l'exercice 16 :

1.
```
import numpy

def powmat(A,m):
    if m==0:
        return numpy.eye(numpy.shape(A)[0])
    else:
        return numpy.dot(A,powmat(A,m-1))
```

2. a) $M(a)$ est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable.

b) $\text{rg}(M(a)) = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

Donc $M(a)$ est de rang 2 si $a \neq 0$, et de rang 1 si $a = 0$.

c) Si $a = 0$: $\ker(f_0) = \text{Vect}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j})$.
Si $a \neq 0$: $\ker(f_a) = \text{Vect}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$.

d) $f_a(\vec{u}) = \mu\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = \mu x \\ ay = \mu y \\ x + y = \mu z \end{cases}$.

La deuxième ligne nous donne $(a - \mu)y = 0$ et donc $a = \mu$ ou $y = 0$.

e) $\text{rg}(M(a) - \lambda I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1-\lambda\\ 0 & a-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda(2-\lambda)\end{pmatrix}$. $\text{sp}(M(a)) = \{0, a, 2\}$.

Si $a = 0$: $E_0(M(0)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $E_2(M(0)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Si $a = 2$: $E_0(M(2)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, $E_2(M(2)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Si $a \neq 0$ et $a \neq 2$: $E_0(M(a)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, $E_2(M(a)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$,

$E_a(M(a)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

f) $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. $M(a)^3 = 4M(a)$.

4. On remarque que $M(a)^4 = 4M(a)^2$, donc on peut montrer par récurrence que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $M(a)^{2p} = 4^{p-1}M(a)^2$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $M(a)^{2p+1} = 4^p M(a)$.
On peut aussi montrer directement par récurrence que $M(a)^n = \begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & (-2)^n & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 17 :

1. a) Comme E est de dimension finie, $\text{Im}(f+g)$, $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont bien de dimensions finies, donc on peut parler des rangs de $f+g$, f et g.
On considère $y \in \text{Im}(f+g)$. Alors il existe $x \in E$ tel que :

$$y = (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Or $f(x) \in \text{Im}(f)$ et $g(x) \in \text{Im}(g)$.
Donc $f(x) = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p x_p$ et $g(x) = \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_k y_k$.
On a donc $y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p + \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_k y_k$.
Cela montre que $\text{Im}(f+g) \subset \text{Vect}(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_k)$.

b) D'après la question précédente, on a :

$$\text{rg}(f+g) \leqslant \dim(\text{Vect}(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_k)) \leqslant \text{card}(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_k) = p+k.$$

En conclusion, on a bien $\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

c) En appliquant, ce résultat de façon « astucieuse » on peut écrire :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f+g+(-g)) \leqslant \text{rg}(f+g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f+g) + \text{rg}(g).$$

On en déduit que $\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leqslant \text{rg}(f+g)$.
De même $\text{rg}(g) = \text{rg}(f+g-f) \leqslant \text{rg}(f+g) + \text{rg}(f)$ et donc $-\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f) - \text{rg}(g)$.
Ainsi, on a montré que $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leqslant \text{rg}(f+g)$.

2. a) Soit $y \in \text{Im}(g)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = g(x)$.
On a donc $f(y) = f(g(x)) = 0$ car $f \circ g = 0$. Cela signifie que $y \in \ker(f)$.
On a donc montré que $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$.

b) Comme $f+g$ est bijectif on sait que $\text{rg}(f+g) = \dim(E)$.
Donc d'après la question 1. b) $\dim(E) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
D'après la question précédente, on a aussi $\text{rg}(g) \leqslant \dim(\ker(f))$. Or d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f)$.
Donc $\text{rg}(g) \leqslant \dim(E) - \text{rg}(f) \Longrightarrow \text{rg}(g) + \text{rg}(f) \leqslant \dim(E)$.
En conclusion $\dim(E) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

Correction de l'exercice 18 :

1. Soit $\overrightarrow{u} \in \ker(f)$. On a alors :

$$g \circ f(\overrightarrow{u}) = g\left(f(\overrightarrow{u})\right) = g(0) = 0$$

Donc $\overrightarrow{u} \in \ker(g \circ f)$.
En conclusion $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.

2. • Sens direct :
Supposons que $\ker(g \circ f) = \ker(f)$. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$.
On sait alors que $g(\overrightarrow{u}) = 0$ et il existe $\overrightarrow{a} \in E$ tel que $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{a})$.
Or on remarque que $g\overrightarrow{u}) = g \circ f(\overrightarrow{a}) = 0$. Donc $\overrightarrow{a} \in \ker(g \circ f) = \ker(f)$.
Ainsi $f(\overrightarrow{a}) = 0$ et donc $\overrightarrow{u} = 0$.
On a bien $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.
• Réciproque :
Supposons que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.
On sait déjà que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
Soit $\overrightarrow{u} \in \ker(g \circ f)$. On a donc $g(f(\overrightarrow{u})) = 0$, et donc $f(\overrightarrow{u}) \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$
Ainsi, $f(\overrightarrow{u}) = 0$ et donc $\overrightarrow{u} \in \ker(f)$.
En conclusion $\ker(f) = \ker(g \circ f)$.
3. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.
Alors il existe $\overrightarrow{a} \in E$ tel que $\overrightarrow{u} = g \circ f(\overrightarrow{a}) = g\left(f(\overrightarrow{a})\right)$.
Donc $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(g)$.
Ainsi $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
4. • Sens direct :
Supposons que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.
Soit $\overrightarrow{u} \in E$. On cherche à écrire $\overrightarrow{u}$ sous la forme $f(\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a} \in E$ et $\overrightarrow{b} \in \ker(g)$.
Analyse : Supposons que cette décomposition existe.
On aurait alors $g(\overrightarrow{u}) = g \circ f(\overrightarrow{a})$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{a})$.
Synthèse : Comme $g(\overrightarrow{u}) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$, il existe $\overrightarrow{a} \in E$ tel que $g(\overrightarrow{u}) = g \circ f(\overrightarrow{a})$.
On choisit donc ce $\overrightarrow{a}$ et on remarque que $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{a})$.
On a bien $f(\overrightarrow{a}) \in \mathrm{Im}(f)$ et $\overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{a}) \in \ker(g)$.
(car $g(\overrightarrow{u} - f(\overrightarrow{a})) = g(\overrightarrow{u}) - g(f(\overrightarrow{a})) = 0$)
Ainsi $E = \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$
• Réciproque :
On suppose que $E = \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$.
On sait déjà que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(g)$.
Alors il existe $\overrightarrow{a} \in E$ tel que $\overrightarrow{u} = g(\overrightarrow{a})$.
Comme $\overrightarrow{a} \in E$, on peut écrire $\overrightarrow{a} = f(\overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ avec $\overrightarrow{c} \in \ker(g)$.
Donc $\overrightarrow{u} = g(f(\overrightarrow{b}))$.
Ainsi $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$ et donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Correction de l'exercice 19 :

1. Si f est bijective alors pour tout entier k, f^k est bijective. Mais comme il existe k tel que $f^k = 0$ ceci est absurde.
Donc f n'est pas bijective.
2. a) On cherche tous les réels $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ tels que $a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0$.
En appliquant f^{p-1} à cette égalité on obtient :
$$\begin{aligned} & f^{p-1}(a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{p-1} f^{p-1}(x_0)) = 0 \\ \Rightarrow & a_0 f^{p-1}(x_0) + a_1 f^p(x_0) + \cdots + a_{p-1} f^{2p-2}(x_0) = 0 \\ \Rightarrow & a_0 f^{p-1}(x_0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \end{aligned}$$
Donc $a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 f(x_0) + \cdots + a_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0 \end{cases}$
On applique alors f^{p-2} à l'égalité et on obtient $a_1 = 0$.
On répète l'opération et on a donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$.
La famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ est donc libre.
b) Toute famille libre de E possède nécessairement moins de n vecteurs. Or $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre de p vecteurs.
Donc $p \leqslant n$.

Correction de l'exercice 20 :

1. La famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$ qui contient n vecteurs donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant n$.
2. On cherche tous les réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = 0$.
En appliquant f, grâce à sa linéarité, on obtient $a_1 f(u_1) + \ldots + a_n f(u_n) = 0$.
Or, on sait que la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.
Donc $a_1 f(u_1) + \ldots + a_n f(u_n) = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$.
La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est donc libre.
3. — Comme $f \circ f = 0$, si $u \in \mathrm{Im}(f)$ alors $u = f(v)$ et donc $f(u) = f(f(v)) = 0$, c'est-à-dire $u \in \ker(f)$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.
— D'après le point précédent, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\ker(f))$. Et donc, en utilisant le théorème du rang, on obtient $2\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2n$, c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n$.
Or, dans la question 1., on a montré que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant n$.
Donc on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$ et, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = n$.
En conclusion, $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f))$, donc $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$.