

Premier problème : équation de diffusion

- La fonction f étant supposée solution de l'équation aux dérivées partielles (E), elle est forcément dérivable par rapport à la variable t . Pour vérifier les autres hypothèses il faudrait supposer que l'on cherche les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0; 1] \times \mathbb{R}$ ce qui aurait dû être précisé dans l'énoncé.

On pose pour $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \int_0^1 f(x, t) \, dx$$

D'après les théorèmes donnés dans l'énoncé φ est dérivable dans $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx$$

En utilisant l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi'(t) = \alpha \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \, dx = \alpha \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right]_0^1 = 0$$

La dernière égalité étant obtenue en utilisant les conditions aux bords. La fonction φ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$

Pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\int_0^1 f(x, t) \, dx = 1$

Interprétation à t fixé $x \mapsto f(x, t)$ représente la densité (par exemple de chaleur) à l'instant t donc $\int_0^1 f(x, t) \, dx$ représente la quantité totale de chaleur. Comme on étudie une équation de diffusion, et que les conditions aux bords impliquent qu'il n'y a pas de transfert avec l'extérieur, la quantité totale reste identique au cours du temps.

- a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- b) On pose pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t)$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables, et pour t réel positif :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{k=1}^n y'_k(t) \\ &= \frac{1}{\alpha \Delta^2} \sum_{k=1}^n (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \\ &= \frac{1}{\alpha \Delta^2} \left(\sum_{k=2}^{n+1} y_k - 2 \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=0}^{n-1} y_k \right) \\ &= \frac{1}{\alpha \Delta^2} (y_{n+1} - y_1 - y_n + y_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

conditions aux bords (CB')

Ce qui démontre que la fonction φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$, et comme $\sum_{k=1}^n y_k(0) = 1$, on obtient :

$$\text{Pour } t \in \mathbb{R}^+, \sum_{k=1}^n y_k(t) = 1.$$

La quantité totale de la valeur étudiée est constante, comme dans le modèle précédent.

3. On remarque que la somme des coefficients sur chacune des lignes de A est nulle¹ donc

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc trouver un vecteur non nul propre associé à la valeur propre 1.

$$0 \text{ est valeur propre de } A.$$

En effectuant successivement sur A les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_2, \dots, L_n \leftarrow L_n + L_{n-1}$, on trouve que la matrice A est de même rang que la matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et cette matrice est de rang $n-1$ (ce qui redémontre que 0 est valeur propre de A). En utilisant le théorème du rang et en remarquant que $E_0(A)$, le sous espace propre associé à 0, est le noyau de A :

$$\text{rg}(A) + \dim E_0(A) = n$$

On en déduit

$$E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

Une solution Y est stationnaire $\Leftrightarrow$ pour tout t réel $Y'(t) = 0$, c'est à dire si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad Y(t) = Y(0) \quad \text{et} \quad Y(0) \in E_0(A)$$

et comme Y doit vérifier $\sum_{k=1}^n y_k(0) = 1$

$$\text{La seule solution stationnaire est } t \mapsto \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Interprétation : si la température est homogène il n'y a pas de diffusion.

4. a) A est une matrice symétrique à coefficients réels, en utilisant le théorème spectral :

$$A \text{ est diagonalisable.}$$

1. Car il y a diffusion avec conservation

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne propre (donc non nul) associé à λ , à coefficients réels.

On a alors

$$AZ = \lambda Z$$

donc

$$\begin{cases} -z_1 + z_2 & = \lambda z_1 \\ z_1 - 2z_2 + z_3 & = \lambda z_2 \\ \dots & \\ z_{n-2} - 2z_{n-1} + z_n & = \lambda z_{n-1} \\ z_{n-1} - z_n & = \lambda z_n \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} z_2 & = (1 + \lambda)z_1 \\ z_1 + z_3 & = (2 + \lambda)z_2 \\ \dots & \\ z_{n-2} + z_n & = (2 + \lambda)z_{n-1} \\ z_{n-1} & = (1 + \lambda)z_n \end{cases}$$

Soit $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que

$$|z_p| = \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}$$

On commence par remarquer que z_p est non nul sinon Z serait un vecteur nul.

Cas $p \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$ alors

$$z_{p-1} + z_{p+1} = (2 + \lambda)z_p$$

en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|2 + \lambda||z_p| \leq |z_{p-1}| + |z_{p+1}|$$

en utilisant la définition de z_p :

$$|2 + \lambda||z_p| \leq 2|z_p|$$

et donc comme $|z_p| > 0$:

$$|2 + \lambda| \leq 2$$

donc :

$$-2 \leq 2 + \lambda \leq 2$$

donc :

$$\lambda \in [-4; 0]$$

Cas $p = 1$.

$$z_2 = (1 + \lambda)z_1$$

donc :

$$|1 + \lambda||z_1| \leq |z_1|$$

donc, comme $|z_1| > 0$:

$$|1 + \lambda| \leq 1$$

donc

$$\lambda \in [-2; 0]$$

cas $p = n$ se traite de la même manière

$$\boxed{\text{Sp}(A) \subset [-4; 0].}$$

Remarque l'utilisation d'un tel z_p pour "localiser" les valeurs propres est assez classique.

5. a) On sait que toutes les valeurs propres de A sont négatives et que 0 est valeur propre (question 3).

$$\lambda_1 = 0$$

On sait de plus que $\dim E_0(A) = 1$ (question 3) donc

$$\lambda_2 < 0$$

- b) P est une matrice à coefficients constants et en utilisant la linéarité de la dérivation

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad W'(t) = P^{-1}Y'(t)$$

donc pour $t \in \mathbb{R}^+$

$$W'(t) = \frac{1}{\alpha\Delta^2} P^{-1}AY(t)$$

et donc

$$W'(t) = \frac{1}{\alpha\Delta^2} P^{-1}APW(t)$$

En notant $D = P^{-1}AP$

$$\text{Pour } t \in \mathbb{R}^+, W'(t) = \frac{1}{\alpha\Delta^2} DW(t)$$

On notant $W(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix}$ on obtient

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad w'_i(t) = \frac{1}{\alpha\Delta^2} \lambda_i w_i(t)$$

donc, il existe des constantes réelles, $C_1, \dots, C_n$ telles que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad w_i(t) = C_i \exp\left(\frac{1}{\alpha\Delta^2} \lambda_i t\right)$$

En utilisant la réponse précédente

$$\forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} w_i(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) On a donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = C_1 P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par construction de la matrice de passage la première colonne de P est constituée des coordonnées d'un vecteur propre associée à la valeur propre $\lambda_1 = 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) \in E_0(A)$$

On sait que $E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, quand le temps devient très grand la température tend à devenir homogène.

6. a) On trouve

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Après calculs

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Après calculs

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

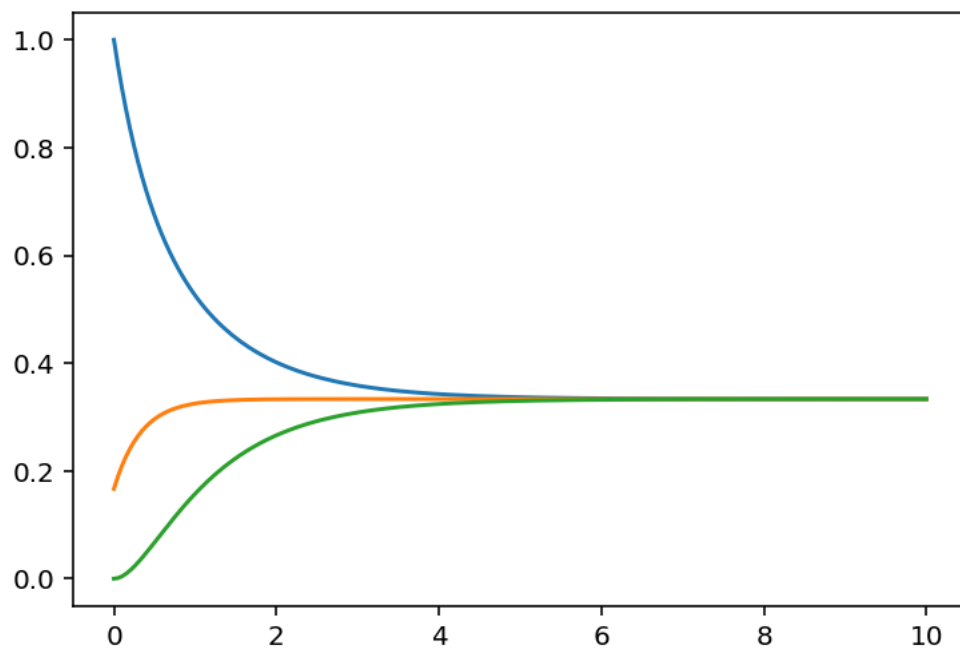
$$W(0) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\text{Pour } t \in \mathbb{R}_+, W(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -3e^{-t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

En utilisant $Y = PW$

$$\text{Pour } t \in \mathbb{R}_+, Y(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 + 3e^{-t} + e^{-3t} \\ 2 - e^{-3t} \\ 2 - 3e^{-t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$$



```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```

def y1(t):
    return (2+3*np.exp(-t)+ np.exp(-3*t))/6

def y2(t):
    return (2- np.exp(-3*t))/6
def y3(t):
    return (2-3*np.exp(-t)+ np.exp(-3*t))/6

T=np.linspace(0,10, 200)
plt.plot(T,y1(T))
plt.plot(T,y2(T))
plt.plot(T,y3(T))
plt.show()

```

c) Il suffit de choisir t tel que

$$\frac{1}{6} |3e^{-t} + e^{-3t}| \leq 10^{-5} \quad \text{et} \quad \frac{1}{6} |3e^{-t}| \leq 10^{-5} \quad \text{et} \quad \frac{1}{6} |-3e^{-t} + e^{-3t}| \leq 10^{-5}$$

En utilisant une inégalité triangulaire il suffit de trouver t tel que

$$\frac{1}{6} (3e^{-t} + e^{-3t}) \leq 10^{-5}$$

Comme pour $t \in \mathbb{R}^+$, $e^{-3t} \leq e^{-t}$ il suffit de trouver t tel que

$$\frac{2}{3}e^{-t} \leq 10^{-5}$$

En utilisant la table des valeurs donnée en début d'énoncé et la décroissance de $t \mapsto \exp(-t)$

t plus grand que 12 convient.

7. Soit t fixé dans $\mathbb{R}^+$, en appliquant le théorème donné dans l'énoncé avec $a = x_k$ et $\varepsilon = x_{k+1} - x_k = \Delta$ (les dérivées se font par rapport à la première variable), il existe $c_1 \in [0; \Delta]$ tel que :

$$f(x_{k+1}, t) = f(x_k, t) + \Delta f'(x_k, t) + \frac{\Delta^2}{2} f''(x_k, t) + \frac{\Delta^3}{6} f'''(x_k, t) + \frac{\Delta^4}{6} f^{(4)}(c_1, t)$$

En appliquant ce théorème avec $a = x_k$ et $\varepsilon = -\Delta$, il existe $c_2 \in [-\Delta; 0]$ tel que

$$f(x_{k-1}, t) = f(x_k, t) - \Delta f'(x_k, t) + \frac{\Delta^2}{2} f''(x_k, t) - \frac{\Delta^3}{6} f'''(x_k, t) + \frac{\Delta^4}{6} f^{(4)}(c_2, t)$$

En sommant les deux lignes

$$f(x_{k+1}, t) + f(x_{k-1}, t) = 2f(x_k, t) + \Delta^2 f''(x_k, t) + \frac{\Delta^4}{6} (f^{(4)}(c_1, t) + f^{(4)}(c_2, t))$$

$$\left| \frac{f(x_{k+1}, t) + f(x_{k-1}, t) - 2f(x_k, t)}{\Delta^2} - f''(x_k, t) \right| \leq \frac{\Delta^2}{6} (|f^{(4)}(c_1, t)| + |f^{(4)}(c_2, t)|)$$

Comme, à t fixé la fonction $x \mapsto |f^{(4)}(x, t)|$ est continue sur $[0; 1]$ elle admet un maximum $m(t)$ (qui dépend de t)

$$\left| \frac{f(x_{k+1}, t) + f(x_{k-1}, t) - 2f(x_k, t)}{\Delta^2} - f''(x_k, t) \right| \leq \frac{\Delta^2}{3} m(t)$$

On remarque que $\Delta = \frac{1}{n+1}$ et en posant $M(t) = \frac{m(t)}{3}$, on obtient le résultat demandé.

Interprétation $M(t)$ ne dépend pas de n , lorsque l'on remplace la dérivée seconde par l'expression donnée, on fait une erreur qui diminue comme le carré du nombre de pas spatial.

Deuxième problème : détérioration d'une séquence génétique

Remarques préliminaire : l'énoncé ne se préoccupe pas d'étudier convergences des séries étudiées, mais on peut facilement montrer que ces séries convergent pour (au moins) $x \in [0; 1[$. Soit un tel réel x alors

$$0 \leq |a_n x^n| \leq |a_n| |x^n| \leq x^n.$$

La dernière inégalité est obtenue en se rappelant que a_n est une probabilité. Or la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ est convergente pour $x \in [0; 1[$, donc en utilisant le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, on en déduit que si $x \in [0; 1[$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument donc converge. Dans le cas $\sum_{k=0}^n b_n x^n$ ou plus généralement dans le cas où les coefficients de la série sont les probabilités d'événements incompatibles, la formule de σ -additivité permet de savoir que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ est un réel (dans $[0; 1]$) et donc que la série $B(x)$ converge aussi pour $x = 1$.

A. Étude d'un événement régénératif : quelques relations fondamentales

1. La distance entre deux occurrences de $\mathcal{E}$ correspond au temps d'attente de la réalisation de l'événement « le site est détérioré » au cours d'une succession illimitée d'expérience identiques et indépendantes. Donc toutes ces distances entre deux occurrences suivent une loi géométrique de paramètre p et ce sont des VAR indépendantes car les (X_n) sont supposées indépendantes.
2. D'après la description de l'énoncé, $D(\Omega) = \llbracket 1; +\infty \rrbracket$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(D = k) = b_k$ et

$$P(D = +\infty) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = 1 - b.$$

$1 - b$ représente la probabilité que $\mathcal{E}$ n'ait jamais lieu.

3. On introduit les notations suivantes :

- A_n « l'événement $\mathcal{E}$ a lieu au site n » ;
- B_n « l'événement $\mathcal{E}$ a lieu pour la première fois au site n ($n = +\infty$ possible) » ;
- $B_n^{(2)}$ « l'événement $\mathcal{E}$ a lieu pour la seconde fois au site n » ;
- D_2 la VAR égale à la distance entre la première et la seconde occurrence de $\mathcal{E}$;

On a alors, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

$$b_n^{(2)} = P(B_n^{(2)}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{i-1}} \cap A_i \cap \overline{A_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} [D = i] \cap [D_2 = n - i]\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P(D = i) P(D_2 = n - i)$$

evts disjoints et D et D_2 indépendantes

$$= \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-i}$$

même loi

$$= \sum_{i=0}^n b_i b_{n-i}$$

car $b_0 = 0$.

On a aussi $b_0^{(2)} = 0 = b_0 \times b_0$ et $b_1^{(2)} = 0 = b_0 b_1 + b_1 b_0$.

On a donc $b^{(2)} = b * b$ et ainsi, pour $x \in [0; 1]$, $B^{(2)}(x) = B(x) \times B(x) = (B(x))^2$.

4. $(B_n)_{n \in \llbracket 1; +\infty \rrbracket}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 P(A_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)P_{B_k}(A_n) && \text{la somme inclus } +\infty \\
 &= \sum_{k=1}^n P(B_k)P_{B_k}(A_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 0 \\
 &= \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A_{n-k}) && \text{car l'événement est régénératif} \\
 &= \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} && \text{car } b_0 = 0.
 \end{aligned}$$

On a donc bien $a = b * a$

5. Pour tout $x \in [0; 1[$:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (b * a)_n x^n \\
 &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (b * a)_n x^n && \text{car } (b * a)_0 = 0 \\
 &= 1 + B(x)A(x)
 \end{aligned}$$

On obtient bien que $A(x) = \frac{1}{1 - B(x)}$. ($1 - B(x)$ ne peut pas être nul car $A(x)(1 - B(x)) = 1$.)

B. Occurrence de sous-séquences entièrement détériorées

6. Il nous paraît irréaliste de rédiger une réponse rigoureuse à cette question en temps limité.

7. a) Les VAR (X_n) étant supposées indépendantes on a

$$P([X_{n-K+1} = 1] \cap \dots \cap [X_n = 1]) = p^K.$$

b) Je pose $Y_n = [X_{n-K+1} = 1] \cap \dots \cap [X_n = 1]$ et on rappelle que A_i signifie que « l'événement $\mathcal{E}$ a lieu au site i ».

Si l'événement Y_n a lieu, cela signifie que forcément l'événement $\mathcal{E}$ a lieu soit au site $n - K + 1$ soit au site $n - K + 2, \dots$, soit au site n . Donc $Y_n \subset \bigcup_{i=0}^{K-1} A_{n-i}$ et ainsi

$$Y_n = \left(\bigcup_{i=0}^{K-1} A_{n-i} \right) \cap Y_n = \bigcup_{i=0}^{K-1} (A_{n-i} \cap Y_n).$$

Il s'agit ici d'une union disjointe car lorsque $\mathcal{E}$ est réalisé à un certain site k , par définition il n'est pas réalisé aux $K - 1$ sites précédents.

De plus, on peut remarquer que $A_{n-i} \cap Y_n = A_{n-i} \cap [X_{n-i+1} = 1] \cap \dots \cap [X_n = 1]$.

Donc,

$$\begin{aligned}
 P(Y_n) &= \sum_{i=0}^{K-1} P(A_{n-i} \cap Y_n) \\
 &= \sum_{i=0}^{K-1} P(A_{n-i} \cap [X_{n-i+1} = 1] \cap \dots \cap [X_n = 1]) \\
 &= \sum_{i=0}^{K-1} P(A_{n-i}) P_{A_{n-i}}([X_{n-i+1} = 1] \cap \dots \cap [X_n = 1]) \\
 &= \sum_{i=0}^{K-1} a_{n-i} p^i.
 \end{aligned}$$

On a donc $p^K = \sum_{i=0}^{K-1} a_{n-i} p^i$.

- c) Comme on étudie la détérioration de K sites successifs, $\mathcal{E}$ ne peut pas arriver aux rangs 1 à $K-1$. On a donc $a_1 = a_2 = \dots = a_{K-1} = 0$.
- d) Soit $x \in [0; 1[$. Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=K}^{+\infty} p^K x^n &= \sum_{n=K}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{K-1} a_{n-i} p^i \right) x^n && \text{question 7.b)} \\
 &= \sum_{i=0}^{K-1} \left(\sum_{n=K}^{+\infty} a_{n-i} p^i x^n \right) && \text{somme finie de sommes de séries convergentes} \\
 &= \sum_{i=0}^{K-1} \left(\sum_{j=K-i}^{+\infty} a_j p^i x^{j+i} \right) && \text{on pose } j = n - i \\
 &= \sum_{i=0}^{K-1} \left(p^i x^i \sum_{j=K}^{+\infty} a_j x^j \right) && \text{car } a_1 = \dots = a_{K-1} = 0 \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{K-1} p^i x^i \right) \sum_{j=K}^{+\infty} a_j x^j && \text{factorisation par } \sum_{j=K}^{+\infty} a_j x^j.
 \end{aligned}$$

On a donc bien $\sum_{n=K}^{+\infty} p^K x^n = \left(\sum_{i=0}^{K-1} p^i x^i \right) \sum_{j=K}^{+\infty} a_j x^j$.

8. On sait que, pour $x \in [0; 1[$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=K}^{+\infty} a_j x^j &= \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x^j && \text{car } a_1 = \dots = a_{K-1} = 0 \\
 &= \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j - 1 && \text{car } a_0 = 1.
 \end{aligned}$$

Donc, d'après la question précédente, pour $x \in [0; 1[$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=K}^{+\infty} p^K x^n &= \left(\sum_{i=0}^{K-1} p^i x^i \right) (A(x) - 1) \\ \Leftrightarrow p^K \times \frac{x^K}{1-x} &= \frac{1 - (px)^K}{1-px} \times (A(x) - 1) \\ \Leftrightarrow A(x) &= 1 + p^K \times \frac{x^K}{1-x} \times \frac{1-px}{1-(px)^K} \\ \Leftrightarrow A(x) &= 1 + \frac{(px)^K(1-px)}{(1-x)(1-(px)^K)}. \end{aligned}$$

D'après la question 5., pour $x \in [0; 1[$:

$$B(x) = 1 - \frac{1}{A(x)} = 1 - \frac{(1-x)(1-(xp)^K)}{(1-x)(1-(xp)^K) + (1-xp)(xp)^K}.$$

9. On admet que la fonction B est continue en 1 (*résultat sur les séries entières hors-programme en BCPST*).

Donc $b = \lim_{x \rightarrow 1^-} B(x) = 1 - 0$, d'après la question précédente.

On a donc $b = 1$ ce qui signifie qu'il est presque certain que l'événement $\mathcal{E}$ se réalise.

10. Sous réserve de convergence absolue :

$$\begin{aligned} E(D) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(D=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n 1^{n-1} \\ &= B'(1) \end{aligned} \quad \text{en admettant que } B \text{ est dérivable en } 1.$$

Pour $x \in [0; 1]$ posons

$$u(x) = (1-x)(1-(xp)^K) \quad v(x) = (1-x)(1-(xp)^K) + (1-xp)(xp)^K.$$

Alors pour $x \in [0; 1]$

$$B'(x) = -\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

On constate que

$$u(1) = 0 \quad v(1) = (1-p)p^K \quad u'(1) = -(1-p^K)$$

On en déduit donc $E(D) = B'(1) = \frac{1-p^K}{(1-p)p^K}$.

11. Pour $p = \frac{1}{2}$ et $K = 20$, on obtient $E(D) = 2^{21} - 2$.

Pour $p = \frac{1}{6}$ et $K = 20$, on obtient $E(D) = \frac{6^{21} - 6}{5}$.

C. Occurrence de sous-séquences en partie détériorées

12.

13. Notons Z_n l'événement « avoir le motif 1101 aux sites $n-3$, $n-2$, $n-1$ et n ».

a) $P(Z_n) = P([X_{n-3} = 1] \cap [X_{n-2} = 1] \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1]) = qp^3$, par indépendance.

b) On raisonne ici de la même manière qu'à la question 7.b). Soit $n \geq 4$:

$$\begin{aligned}
 P(Z_n) &= P((A_n \cap Z_n) \cup (A_{n-1} \cap Z_n) \cup (A_{n-2} \cap Z_n) \cup (A_{n-3} \cap Z_n)) \\
 &= P(A_n \cap Z_n) + P(A_{n-1} \cap Z_n) + P(A_{n-2} \cap Z_n) + P(A_{n-3} \cap Z_n) \\
 &\text{union disjointe par définition des séquences non recouvrantes} \\
 &= P(A_n) + 0 + 0 + P(A_{n-3})P_{A_{n-3}}(Z_n) \\
 &= a_n^* + a_{n-3}^* \times P_{A_{n-3}}([X_{n-2} = 1] \cap [X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1]) \\
 &= a_n^* + a_{n-3}^* p^2 q.
 \end{aligned}$$

On a donc bien, pour $n \geq 4$, $p^3 q = a_n^* + a_{n-3}^* p^2 q$.

14. On a $a_0^* = 1$, $a_1^* = a_2^* = a_3^* = 0$. Donc, pour $x \in [0; 1[$

$$\begin{aligned}
 A^*(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* x^n \\
 &= 1 + \sum_{n=4}^{+\infty} a_n^* x^n \\
 &= 1 + \sum_{n=4}^{+\infty} (p^3 q - p^2 q a_{n-3}^*) x^n \\
 &= 1 + p^3 q \times \frac{x^4}{1-x} - p^2 q \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^* x^{n+3} \quad \text{chgt d'indice} \\
 &= 1 + \frac{p^3 q x^4}{1-x} - p^2 q x^3 (A^*(x) - 1) \\
 \Leftrightarrow A^*(x) &= 1 + \frac{p^3 q x^4}{(1-x)(1+p^2 q x^3)}
 \end{aligned}$$

15. Comme $\mathcal{E}^*$ est régénératif, d'après la question 5., pour $x \in [0; 1[$:

$$B^*(x) = 1 - \frac{1}{A(x)} = 1 - \frac{(1-x)(1+p^2 x^3)}{p^3 q x^4 + (1-x)(1+p^2 x^3)}.$$

En admettant à nouveau que la fonction B^* est continue en 1, on a :

$$b^* = \lim_{x \rightarrow 1^-} B^*(x) = 1.$$

16. De même qu'à la question 10. $E(D^*) = (B^*)'(1) = \frac{1+p^2}{p^3 q}$.

17. Pour $K = 4$ et $p = \frac{1}{10}$, $E(D) = \frac{10^5 - 10}{9}$ et $E(D^*) = \frac{10^4 - 10^2}{9}$, donc $E(D) > E(D^*)$.

Pour $K = 4$ et $p = \frac{1}{2}$, $E(D) = 2^5 - 2 = 30$ et $E(D^*) = 20$, donc $E(D) > E(D^*)$.

Je ne sais pas quel commentaire est attendu...

D. Généralisation à la recombinaison

18. a) Pour tout entier n , $P_n > 0$ et $\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 - u_{n+1} \leq 1$. La suite (P_n) est donc décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in]0; 1]$ donc, par passage à la limite dans une inégalité, $\ell \in [0; 1]$.

b) Supposons que $\sum u_n$ est convergente. Alors (u_n) converge vers 0 et donc

$$\ln(1 - u_n) \sim -u_n.$$

Par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum -\ln(1 - u_n)$ est convergente et donc $\sum \ln(1 - u_n)$ est convergente.

Supposons que $\sum \ln(1 - u_n)$ est convergente. Alors $(\ln(1 - u_n))$ converge vers 0 et donc, par opération sur les limites, u_n converge vers 0. On peut alors reproduire le raisonnement précédent.

$\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, $\sum \ln(1 - u_n)$ est convergente.

c) On peut remarquer que $\sum_{k=0}^n \ln(1 - u_k) = \ln(P_n)$.

Donc si $\ell = 0$, on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln(1 - u_k) = -\infty$, ce qui signifie que $\sum \ln(1 - u_n)$ est divergente et donc que $\sum u_n$ est divergente.

Réciproquement, si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum \ln(1 - u_n)$ est divergente et cette série étant à termes négatifs, ses sommes partielles diverge forcément vers $-\infty$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(P_n) = -\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$, c'est-à-dire $\ell = 0$.

En résumé, $\ell = 0$ si, et seulement si, $\sum u_n$ est divergente.

d) Soit $\beta > 0$.

Si $\beta = 1$, on reconnait la série harmonique qui est divergente.

Supposons $\beta \neq 1$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ est décroissante. On a donc

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k; k+1], \frac{1}{(k+1)^\beta} &\leq \frac{1}{t^\beta} \leq \frac{1}{k^\beta} \\ \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)^\beta} &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\beta} dt \leq \frac{1}{k^\beta} && \text{croissance de l'intégrale} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\beta} &\leq \int_1^n \frac{1}{t^\beta} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\beta} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta} - 1 &\leq \frac{1}{1-\beta} (n^{1-\beta} - 1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{n^\beta}. \end{aligned}$$

Si $\beta < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\beta} = +\infty$ et donc, d'après la partie de droite de l'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta} = +\infty$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$).

Si $\beta > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\beta} (n^{1-\beta} - 1) = \frac{1}{\beta-1}$. La suite $\left(\frac{1}{1-\beta} (n^{1-\beta} - 1) \right)$ est donc bornée (car convergente) et ainsi $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta} \right)$ est majorée. Comme cette suite est croissante, on en déduit qu'elle est convergente.

En résumé, $\sum \frac{1}{n^\beta}$ est convergente si, et seulement si, $\beta > 1$.

19. Soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé. On pose T_i l'événement « une recombinaison a lieu au site i et il en résulte une détérioration du site n ».

Pour $i < n$, on a $P(T_i) = 0$ et pour $i \geq n$, $P(T_i) = \sum_{j=i-n+1}^{+\infty} \alpha_j = R_{i-n}$.

On note alors T l'événement « le site n est détérioré ». On a $T = \bigcup_{i=n}^{+\infty} T_i$ mais cette union n'est pas disjointe.

On envisage plutôt $\overline{T} = \bigcap_{i=n}^{+\infty} \overline{T_i}$.

Afin de manipuler cette intersection, nous devons ajouter une hypothèse d'indépendance des événements T_i et d'autre part, il nous faut utiliser une propriété hors-programme (mais assez naturelle) qui nous dit que

$$P\left(\bigcap_{i=n}^{+\infty} \overline{T_i}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{i=n}^N \overline{T_i}\right).$$

On en déduit alors que $P(\overline{T}) = \prod_{i=n}^{+\infty} (1 - R_{i-n}) = \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - R_k)$.

En conclusion, $P(T) = 1 - \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - R_k)$.

20. D'après la question 18., $P(T) = 1$ si, et seulement si, $\sum R_n$ est divergente.

a) On a ici $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

b) On a ici $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1 - \gamma)\gamma^k = \gamma^{n+1}$.

Comme $\gamma \in]0; 1[$, la série $\sum R_n$ est convergente et donc $P(T) \neq 1$.

c) On a ici $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{n+2}$, par télescopage.

Donc $\sum R_n$ est divergente et ainsi $P(T) = 1$.