Exercices : Séries réelles

Pour commencer

Exercice 1 :

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ avec $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$;
2. $\sum \mathrm{e}^{-3n}$;
3. $\sum n(n+1)$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} w_n$ avec $w_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$;
5. $\sum 2^{n+1}(-3)^{2-n}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 :

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+3}.$$
2. En déduire une expression simplifiée, sans le signe $\sum$, de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$.
3. Déterminer alors la nature et, en cas de convergence, la somme de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

Exercice 3 :

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 4 :

Soit $u_0 \in]0;1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis que u_n converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 est convergente et calculer sa somme.

Critères de comparaison

Exercice 5 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+\sqrt{n}}$.

1. Déterminer un réel $a > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{a}{n}$.
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
3. Écrire une fonction en Python qui étant donné un entier n renvoie une liste contenant les valeurs des sommes partielles d'indice k pour k allant de 1 à n, puis représenter graphiquement les 50 premières valeurs de ces sommes partielles.

Exercice 6 :

1. Donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\cos(n)\mathrm{e}^{-n^2}$.
2. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0, \qquad |\cos(n)\mathrm{e}^{-n^2}| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
3. Déterminer alors la nature de la série $\sum \cos(n)\mathrm{e}^{-n^2}$.

Exercice 7 :

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum (-1)^n n^2 \tan\left(\frac{1}{5^n}\right)$.

Exercice 8 :

1. a) À l'aide des développement limités déterminer un équivalent simple (de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 3\ln(n^2+1) - 2\ln(n^3+1)$.
   b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
2. a) À l'aide des développement limités déterminer un équivalent simple (de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$) de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$.
   b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

Bien maitriser les séries de références

Exercice 9 :

1. Justifier la convergence de la série $\sum(-1)^n \dfrac{n^2+3}{5^n}$ et calculer la somme de cette série.

   Astuce à retenir : $n^2 = n(n-1)+n$.

2. Justifier la convergence de la série $\sum \dfrac{3n^2+4^{n-2}}{n!}$ et calculer la somme de cette série.

3. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant k} \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \dfrac{\lambda^n}{6^{n-k}n!}$, où k est un entier fixé et λ un réel non nul fixé, et calculer la somme de cette série.

Exercices « classiques »

Exercice 10 :

On pose, pour tout n entier $\geqslant 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad ; \qquad a_n = S_n - \ln(n) \qquad ; \qquad b_n = S_n - \ln(n+1)$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

   Indication : une méthode possible est d'utiliser le théorème des accroissements finis.

2. a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   On note γ leur limite commune. (γ s'appelle la constante d'Euler)

   b) Montrer que $\gamma > 0$.

   Culture : on a montré ici que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ *lorsque* $n \to +\infty$. *Cette égalité s'appelle le développement asymptotique de la série harmonique.*

3. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un réel `eps` et qui calcule et renvoie une valeur approchée de γ à `eps` près.

   Indication : on pourra utiliser le fait que $|a_n - \gamma| \leqslant |a_n - b_n|$.

Exercice 11 :

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que les sous-suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente. On notera S la somme de cette série.
3. Cette série est-elle absolument convergente ?
4. En utilisant les deux suites adjacentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|S - S_{2n}| \leqslant S_{2n+1} - S_{2n}.$$
5. En déduire un entier n_0 tel que S_{2n_0} est une valeur approchée de S à 10^{-3} près.
6. La série semble-t-elle converger « vite » ?
7. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un réel `eps` et qui renvoie une valeur approchée de S à `eps` près.

Pour aller plus loin...

Exercice 12 :

Soit $\lambda > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\lambda n + 1}$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. Vérifier que pour tout entier n, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{\lambda n}\ \mathrm{d}t$.
3. a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\lambda} + r_N$ en précisant la valeur de r_N.

   b) En utilisant le fait que $\dfrac{t^{\lambda(N+1)}}{1+t^\lambda} \leqslant t^{\lambda(N+1)}$ pour tout $t \in [0;1]$, montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} r_N = 0$.

   c) En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et que l'on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\lambda}$.

4. En déduire les valeurs de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 13 :

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Donner la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.
2. En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ est convergente.
3. Justifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \qquad \text{formule de Stirling}$$

Correction

Correction de l'exercice 1 :

1. — Calculons la somme partielle d'indice N :

$$\begin{aligned}S_N = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{N} (\ln(n-1)-\ln(n)) \qquad \text{somme téléscopique} \\ &= (\ln(1)-\ln(2)) + (\ln(2)-\ln(3)) + \dots \\ &\qquad + (\ln(N-2)-\ln(N-1)) + (\ln(N-1)-\ln(N)) \\ &= -\ln(N)\end{aligned}$$

— Déterminons maintenant la limite de S_N : $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \lim\limits_{N\to+\infty} -\ln(N) = -\infty$.

— En conclusion la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ est divergente.

2. — Calculons la somme partielle d'indice N :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-3n} = \sum_{n=0}^{N} \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^n = \frac{1-(\mathrm{e}^{-3})^{N+1}}{1-\mathrm{e}^{-3}}.$$

— Déterminons maintenant la limite de S_N :
Comme $|\mathrm{e}^{-3}| < 1$, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-3}}$.

— En conclusion la série $\sum \mathrm{e}^{-3n}$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-3n} = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-3}}$.

3. — Calculons la somme partielle d'indice N :

$$\begin{aligned}S_N = \sum_{n=0}^{N} n(n+1) = \sum_{n=0}^{N} n^2 + \sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2} \\ = \frac{N(N+1)(N+2)}{3}.\end{aligned}$$

— Déterminons maintenant la limite de S_N :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \frac{N(N+1)(N+2)}{3} = +\infty.$$

— En conclusion la série $\sum n(n+1)$ est divergente.

On aurait aussi pu dire que $\lim\limits_{N\to+\infty} N(N+1) = +\infty \neq 0$ donc la série $\sum n(n+1)$ est grossièrement divergente.

4. — Calculons la somme partielle d'indice N :

$$\begin{aligned}S_N = \sum_{n=2}^{N} w_n &= \sum_{n=2}^{N} \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)} \\ &= \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right) \qquad \text{somme téléscopique} \\ &= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(N+1)}\end{aligned}$$

— Déterminons maintenant la limite de S_N :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(N+1)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

— En conclusion la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ est convergente et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} w_n = \dfrac{1}{\ln(2)}$.

5. — Calculons la somme partielle d'indice N :

$$\begin{aligned}S_N = \sum_{n=0}^{N} 2^{n+1}(-3)^{2-n} &= 2\times(-3)^2 \sum_{n=0}^{N} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 18 \times \frac{1-(-2/3)^{n+1}}{1-(-2/3)} \\ &= \frac{54}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{N+1}\right)\end{aligned}$$

— Déterminons maintenant la limite de S_N : comme $\left|-\dfrac{2}{3}\right| < 1$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{54}{5}.$$

— En conclusion la série $\sum 2^{n+1}(-3)^{2-n}$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1}(-3)^{2-n} = \dfrac{54}{5}$.

6. — Calculons la somme partielle d'indice N :

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)\\
&= \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) + \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) - 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n)\\
&= (\ln(3)+\ln(4)+\ldots+\ln(N+1)) + (\ln(1)+\ln(2)+\ldots+\ln(N-1))\\
&\qquad - 2(\ln(2)+\ln(3)+\ldots+\ln(N))\\
&= \ln(N)+\ln(N+1)+\ln(2)-2(\ln(2)+\ln(N))\\
&= -\ln(2)-\ln(N)+\ln(N+1)\\
&= -\ln(2)+\ln\left(\frac{N+1}{N}\right)
\end{aligned}$$

— Déterminons maintenant la limite de S_N :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} -\ln(2)+\ln\left(\frac{N+1}{N}\right) = -\ln(2).$$

— En conclusion, la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente et $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$.

Correction de l'exercice 2 :

1. $\dfrac{1}{n(n+1)(n+3)} = \dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{6(n+3)}$
2.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+3)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+3)}\right)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\sum_{n=4}^{N+3}\frac{1}{n}\\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\sum_{n=4}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{N+1}\right)\\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\right)\\
&= \frac{7}{36} - \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\right)
\end{aligned}$$

3. On a $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{7}{36} - \dfrac{1}{2(N+1)} + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{N+1}+\dfrac{1}{N+2}+\dfrac{1}{N+3}\right) = \dfrac{7}{36}$.

   Donc la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)} = \dfrac{7}{36}$.

Correction de l'exercice 3 :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est grossièrement divergente.

Correction de l'exercice 4 :

1. • On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: $0 < u_n < 1$.

   - Pour $n = 0$: On sait que $u_0 \in]0;1[$ donc on a bien $0 < u_0 < 1$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

   On a $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$. Or $0 < u_n < 1$, donc $0 < 1-u_n < 1$ et par conséquent $0 < u_{n+1} < 1$.

   $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

   - Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

   • On a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

   Ainsi (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un nombre ℓ.

Comme on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est continue sur $[0;1]$ on sait que ℓ doit être un point fixe de f. Or :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - x^2 = x \Leftrightarrow -x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc (u_n) converge vers 0.

2. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^2 = \sum_{n=0}^{N}(u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1}$.

   Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} u_0 - u_{N+1} = u_0$ donc la série $\sum u_n^2$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$.

Correction de l'exercice 5 :

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\ln(n^2+1) \geqslant \ln(2)$ et $n + \sqrt{n} \leqslant 2n$.

   Par opérations sur les inégalités on a donc , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2n}$.

2. On a donc vu que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2n} \geqslant 0$.

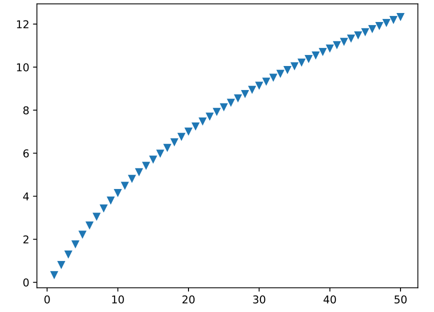
   On sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente donc par multiplication par un réel non nul, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(2)}{2n}$ est divergente.

   D'après le critère de minoration pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est donc divergente.

3. L'objectif est de faire une fonction qui renvoie la liste suivante : $\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{1} u_i, \sum_{i=1}^{2} u_i, \sum_{i=1}^{3} u_i, \dots \sum_{i=1}^{n} u_i\right]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import log,sqrt

def sommes_partielles(n):
    '''renvoie la liste des sommes partielles d'indice k pour
    k allant de 1 à n'''
    L=[log(2)/2]
    for k in range(2,n+1):
        L.append(L[-1]+log(k**2+1)/(k+sqrt(k)))
    return L
N=[k for k in range(1,51)]
sommes=sommes_partielles(50)
plt.plot(N,sommes,'v')
plt.show()
```



Correction de l'exercice 6 :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \mathrm{e}^{-n^2} = 0$, d'après les croissances comparées et la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   Donc par produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\cos(n)\mathrm{e}^{-n^2} = 0$.

2. Par définition de la notion de limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|n^2\cos(n)\mathrm{e}^{-n^2}| \leqslant 1$ et donc $\left|\cos(n)\mathrm{e}^{-n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ (par division par n^2 qui est strictement positif).

3. On a déjà montré que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \left|\cos(n)\mathrm{e}^{-n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   On sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

   D'après les critères de comparaison (ou théorème de majoration) pour les séries à termes positifs, la série $\sum \left|\cos(n)\mathrm{e}^{-n^2}\right|$ est donc convergente.

   Comme la convergence absolue implique la convergence on peut conclure que la série $\sum \cos(n)\mathrm{e}^{-n^2}$ est convergente.

Correction de l'exercice 7 :

1. On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ et $u_n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$.

On sait que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

Donc, d'après les critères de comparaison (ou théorème des équivalents) pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

2. On sait que $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Donc $\left|(-1)^n n^2 \tan\left(\frac{1}{5^n}\right)\right| \sim n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n$ et $n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n > 0$.

On peut alors écrire que $n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{25}\times n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} + \frac{1}{5}\times n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Or, on sait que les séries $\sum n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$ et $\sum n\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ sont convergentes car $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, donc, par multiplication par un réel et somme de séries convergentes, la série $\sum n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n$ est convergente.

D'après le théorème des équivalents pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum(-1)^n n^2\tan\left(\frac{1}{5^n}\right)$ est absolument convergente.

Or la convergence absolue implique la convergence, donc la série $\sum(-1)^n n^2\tan\left(\frac{1}{5^n}\right)$ est convergente.

Correction de l'exercice 8 :

1. a)

$$\begin{aligned}
u_n &= 3\left(\ln(n^2)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2\left(\ln(n^3)+\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= 3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 3\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2\left(\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$.

b) On vient de voir que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$. De plus, $\frac{3}{n^2} \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 0$ (au moins à partir d'un certain rang).

On sait aussi que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de référence de notre cours.

D'après les critères de comparaison (ou théorème des équivalents) pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

2. a)

$$\begin{aligned}
v_n &= \mathrm{e}^{n\ln(1+1/n)} - \mathrm{e} = \exp\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(1/n^2)\right)\right) - \mathrm{e}\\
&= \exp\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \mathrm{e}\\
&= \mathrm{e}\times\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \mathrm{e}\\
&= \mathrm{e}\times\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \mathrm{e}\\
&= -\frac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\mathrm{e}}{2n}$.

b) D'après la question précédente, on a $-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2n} > 0$.

La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est divergente car c'est la série harmonique qui est une série de référence.

D'après les critères de comparaison (ou théorème des équivalents) pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} -v_n$ est divergente et donc, par multiplication par un réel non nul, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est divergente.

Correction de l'exercice 9 :

1. Soit $N\in\mathbb{N}$. On a

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{n^2+3}{5^n} = \frac{1}{25}\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-2} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n}$$

On reconnait des sommes partielles de série géométrique, dérivée de série géométrique et dérivée seconde de série géométrique. Or $\left|\dfrac{-1}{5}\right| < 1$, donc ce sont des sommes partielles de séries convergentes.

Ainsi, la série $\sum (-1)^n \dfrac{n^2+3}{5^n}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{5^n} = \frac{1}{25}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-2} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{25}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{5}\right)^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{5}\right)^2} + 3\frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{65}{27}$$

2. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{3n^2+4^{n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{N}\frac{3n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{N}\frac{4^{n-2}}{n!}$$

$$= 3\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n-1)!} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{N}\frac{4^n}{n!}$$

$$= 3\sum_{n=1}^{N}\frac{n-1}{(n-1)!} + 3\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{N}\frac{4^n}{n!}$$

$$= 3\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(n-2)!} + 3\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{j!} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{N}\frac{4^n}{n!}$$

$$j = n-1$$

$$= 3\sum_{i=0}^{N-2}\frac{1}{i!} + 3\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{j!} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{N}\frac{4^n}{n!}$$

$$i = n-2$$

On reconnait des sommes partielles de série exponentielle, or on sait que la série exponentielle est toujours convergente.

Ainsi la série $\sum \dfrac{3n^2+4^{n-2}}{n!}$ et convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+4^{n-2}}{n!} = 3\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!} + 3\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{n!}$$

$$= 3\mathrm{e}^1 + 3\mathrm{e}^1 + \frac{1}{16}\mathrm{e}^4 = 6\mathrm{e} + \frac{1}{16}\mathrm{e}^4.$$

3. Soit k un entier fixé et λ un réel fixé. Pour tout entier $N \geqslant k$, on a :

$$\sum_{n=k}^{N}\binom{n}{n-k}\frac{\lambda^n}{6^{n-k}n!} = \sum_{n=k}^{N}\frac{\lambda^n}{6^{n-k}k!(n-k)!} = \frac{\lambda^k}{k!}\sum_{j=0}^{N-k}\frac{(\lambda/6)^j}{j!}.$$

On reconnait ici une somme partielle de la série exponentielle et on sait que la série exponentielle est tout le temps convergente.

Donc la série $\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{n-k}\dfrac{\lambda^n}{6^{n-k}n!}$ est convergente et :

$$\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{n-k}\frac{\lambda^n}{6^{n-k}n!} = \frac{\lambda^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda/6)^j}{j!} = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{\lambda/6}}{k!}.$$

Correction de l'exercice 10 :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \ln(x)$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

   La fonction f est continue sur $[k; k+1]$ et dérivable sur $]k; k+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]k; k+1[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(k+1)-f(k)}{k+1-k} = \ln(k+1) - \ln(k).$$

   Or, $f'(c) = \dfrac{1}{c}$ et comme $c \in]k; k+1[$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{k}$ et on a donc :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. a) $a_{n+1} - a_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$.

   D'après la question précédente, $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

   De plus $b_{n+1} - b_n = S_{n+1} - \ln(n+2) - S_n + \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$.

   D'après la question précédente (appliquée avec $k = n+1$), $b_{n+1} - b_n \geqslant 0$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

   Enfin, on a $a_n - b_n = S_n - \ln(n) - S_n + \ln(n+1) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$.

   Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bien des suites adjacentes.

b) On peut remarquer que $b_1 = 1 - \ln(2) > 0$.

Or la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge vers γ donc $\gamma \geqslant b_1$. *(pour une suite croissante et convergente, la limite est supérieure au premier terme)*

On a donc bien $\gamma > 0$.

3. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes les deux vers γ donc pour un n assez grand a_n et b_n seront de « bonnes » valeurs approchées de γ. La question est : quel n choisir ?

On cherche n tel que $|a_n - \gamma| \leqslant \varepsilon$. Grâce à l'indication (qu'il faut savoir redémontrer !), on voit qu'il SUFFIT de prendre n tel que $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon$ c'est-à-dire n tel que $|\ln(n+1) - \ln(n)| \leqslant \varepsilon$. C'est cette condition que nous allons utiliser dans notre programme informatique.

```
from math import log

def approx_gamma(eps):
    S=1 # valeur de S_1
    n=1
    while log(n+1)-log(n)>eps:
        n+=1
        S+=1/n
    return S-log(n) # on renvoit a_n
```

Correction de l'exercice 11 :

1. — La suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est décroissante puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leqslant 0.$$

— La suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est croissante puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0.$$

— On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.

2. Étant adjacentes, les sous-suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent vers une même limite $S \in \mathbb{R}$. Cela entraine la convergence de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ vers le réel S, prouvant ainsi que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

3. Non, cette série n'est pas absolument convergente, puisque $\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \frac{1}{k}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ est une série divergente.

4. L'adjacence des deux sous-suites donne l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}.$$

On a donc $0 \leqslant S - S_{2n} \leqslant S_{2n+1} - S_{2n}$ et ainsi $|S - S_{2n}| \leqslant S_{2n+1} - S_{2n}$

5. D'après la question précédente $|S - S_{2n}| \leqslant \frac{1}{2n+1}$.

Donc pour avoir $|S - S_{2n}| \leqslant 10^{-3}$, il suffit que $\frac{1}{2n+1} \leqslant 10^{-3}$, c'est-à-dire $n \geqslant 499,5$.
L'entier $n_0 = 500$ convient.
Ceci montre que S_{1000} est une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

6. La convergence de la série semble très lente, puisqu'il faut additionner 1000 termes pour avoir seulement une précision à 3 chiffres après la virgule !

7.
```
def approx(eps):
    '''étant donné un réel eps, la fonction renvoie la valeur
    de S_{2n} avec n tel que 1/(2n+1)<eps'''
    n=1
    S=1/2 #on commence avec n=1 donc S contient la valeur de S_2
    while 1/(2*n+1)>=eps:
        S+=1/(2*n+1)-1/(2*n+2)
        n+=1
    return S
```

Correction de l'exercice 12 :

1. On a $|u_n| = \frac{1}{\lambda n + 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda n}$.

Or on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\lambda n}$ est divergente (constante $\times$ série harmonique), donc d'après les critères de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n|$ est divergente.

La série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

2. On a $\displaystyle\int_0^1 t^{\lambda n}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\lambda n+1}}{\lambda n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\lambda n+1}$.

   On a donc bien $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{\lambda n}\ \mathrm{d}t$.

3. a) Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n \int_0^1 t^{\lambda n}\ \mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{\lambda n}\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N}(-t^{\lambda})^n\right)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1-(-t^{\lambda})^{N+1}}{1+t^{\lambda}}\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^{\lambda}}\ \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-1)^{N+1}t^{\lambda(N+1)}}{1+t^{\lambda}}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

   On a donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{\lambda}}\ \mathrm{d}t + r_N$ avec $r_? = -\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{N+1}t^{\lambda(N+1)}}{1+t^{\lambda}}\ \mathrm{d}t$.

   b) On a :

$$\begin{aligned}|r_N| = \left|-\int_0^1 \frac{(-1)^{N+1}t^{\lambda(N+1)}}{1+t^{\lambda}}\ \mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 \frac{t^{\lambda(N+1)}}{1+t^{\lambda}}\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 t^{\lambda(N+1)}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda(N+1)+1}\end{aligned}$$

   On a donc $0 \leqslant |r_N| \leqslant \dfrac{1}{\lambda(N+1)+1}$. Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\lambda(N+1)+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} r_N = 0$.

   c) Grâce aux deux question précédentes, on obtient que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{\lambda}}\ \mathrm{d}t$, c'est-à-dire les sommes partielles ont une limite finie.

   Ainsi la série $\sum u_n$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{\lambda}}\ \mathrm{d}t$.

4. En appliquant la question précédente avec $\lambda = 1$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$$

   Et en appliquant la question précédente avec $\lambda = 2$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Dans cet exercices on a illustré le fait qu'il existe des séries convergentes mais pas absolument convergentes.

Correction de l'exercice 13 :

1. Calculons tout d'abord v_n. On a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-1}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \mathrm{e}^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2}\end{aligned}$$

   Donc $v_n = -1 + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

   Afin de connaitre la nature de la série $\sum v_n$ nous souhaitons obtenir un équivalent de v_n et donc pour cela nous allons chercher un développement limité de v_n.
   (On va utiliser le développement limité de $\ln(1+x)$ *à l'ordre 3. On ne peut pas deviner à l'avance que c'est cet ordre qu'il faut utiliser, c'est en « tâtonnant » qu'on en arrive à cette conclusion...)*

$$\begin{aligned}v_n &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

   Ainsi $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

   On sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{12n^2}$ est convergente (constante $\times$ série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc, d'après le critère des équivalents sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente.

2. On peut maintenant remarquer que $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

   Donc, par télescopage, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_1)$.

   Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente, on sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n$ admet une limite finie lorsque $N \to +\infty$.

Ainsi $\ln(u_{N+1})$ admet une limite finie, ce qui signifie que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

3. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$.

   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{\ell}$.

   Comme une exponentielle n'est jamais nulle, on a $\mathrm{e}^{\ell} \neq 0$ et on peut donc écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\ell}$.

   On obtient alors $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\mathrm{e}^{\ell}}$.