# *Formulaire scientifique*

## Table des matières

# A) Calcul littéral

## 1. Identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

## 2. Puissances, exponentielle, logarithme

— Puissances : soit $x$, $y$, $\alpha$, $\beta$ des réels tels que les expressions ci-dessous sont bien définies.

$x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ $\qquad$ $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$

$x^\alpha \times y^\alpha = (x \times y)^\alpha$ $\qquad$ $\dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha$ $\qquad$ $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

— Exponentielle : soit $(x, y, a) \in \mathbb{R}^3$

$\mathrm{e}^0 = 1$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0$ $\qquad$ Si $a > 0$, $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$

$\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}$ $\qquad$ $(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$

— Logarithme népérien (et décimal) :

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1,$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x, \qquad \forall x > 0,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x, \qquad \forall x > 0,\ \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } y > 0,\ \mathrm{e}^x = y \iff x = \ln(y), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } y > 0,\ 10^x = y \iff x = \log(y).$$

Soient $x > 0$, $y > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x).$$

## 3. Opérations sur les inégalités

$a$, $b$, $c$ et $d$ désignent des réels.

— Transitivité : $a \leqslant b$ et $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

— Somme :
$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$ (*pas de condition sur* $c$).
$a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$.

— Produit :
Par un réel positif : $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0 \Rightarrow a \times c \leqslant b \times c$. Par un réel négatif : $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0 \Rightarrow a \times c \geqslant b \times c$.
Produit d'inégalités : $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d \Rightarrow a \times c \leqslant b \times d$.

— Passage à l'inverse :
Réels strictement positifs : $0 < a \leqslant b \Rightarrow \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$. Réels strictement négatifs : $a \leqslant b < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$.

— Image par une fonction :
$a \leqslant b$ et $f$ croissante sur $I$ contenant $a$ et $b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
$a \leqslant b$ et $f$ décroissante sur $I$ contenant $a$ et $b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$.
$a < b$ et $f$ strictement croissante sur $I$ contenant $a$ et $b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
$a < b$ et $f$ strictement décroissante sur $I$ contenant $a$ et $b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

### 4. Équations de degré 2 à coefficients réels

On considère l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
On appelle **discriminant** de l'équation le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution réelle (solution double) : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

— Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes : $x_1 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

### 5. Factoriels et coefficients binomiaux

— <u>Factoriel</u> : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ et $0! = 1$.

— <u>Coefficient binomial</u> : $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ **et** $n \geqslant p$.

— <u>Règle d'or des factoriels</u> : $\square! = \square \times (\square - 1)!$, où $\square$ peut être remplacé par n'importe quel entier naturel non nul.

— <u>Formule de Pascal</u> : $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$, avec $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $n - 1 \geqslant p$.

— <u>Formule de symétrie</u> : $\dbinom{n}{n-p} = \dbinom{n}{p}$, avec $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $n \geqslant p$.

### 6. Sommes finies remarquables

**ATTENTION** lorsque vous apprenez vos formules de sommes, apprenez bien le point de départ et d'arrivée du compteur de la somme!!!

— Si $q \neq 1$ ($q \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et si $n$ et $p$ sont deux entiers naturels fixés ($p \leqslant n$),

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

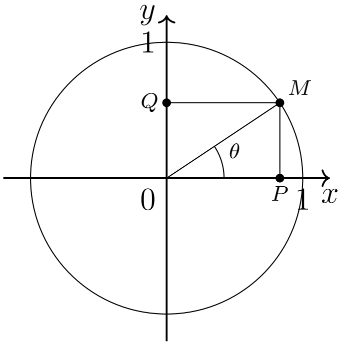
*(Je vous laisse réfléchir au cas $q = 1$ !)*

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

— **Formule du binôme** : si $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

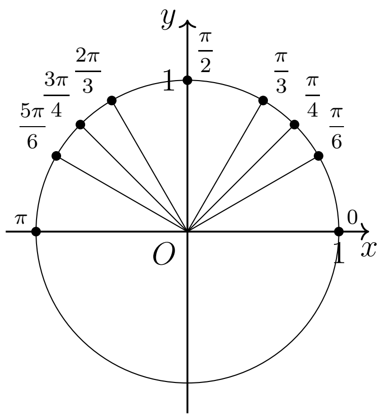
## B) Trigonométrie




$$\overline{OP} = \cos(\theta)$$
$$\overline{OQ} = \sin(\theta)$$
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \text{ pour } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\text{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \text{ pour } \theta \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Valeurs remarquables :

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\theta)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\sin(\theta)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan(\theta)$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |




Les formules basiques, à connaitre parfaitement : ($a$, $b$ et $\theta$ sont des réels)

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 \qquad 1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

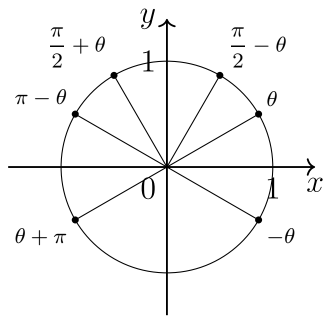
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \qquad \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
$\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$
$\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$
$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta)$

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
$\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$
$\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$
$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta)$




Les formules dont il faut connaitre l'existence et qu'il faut savoir retrouver :

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

## C) Nombres complexes

Soit $z$ un nombre complexe quelconque et i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

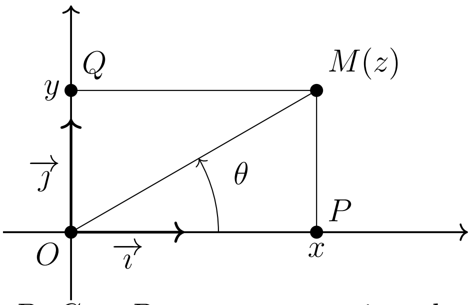
| **Forme algébrique** | **Forme trigonométrique** |
|---|---|
| $z = x + \mathrm{i}\, y$ | $z = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \rho\, (\cos(\theta) + \mathrm{i} \sin(\theta))$ |
| avec $x$ et $y$ réels. | avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. |

### Vocabulaire

- **Partie réelle** de $z$ : $\mathrm{Re}(z) = x = \rho \cos(\theta)$
- **Partie imaginaire** de $z$ : $\mathrm{Im}(z) = y = \rho \sin(\theta)$
- **Conjugué** de $z$ : $\overline{z} = x - \mathrm{i}y = \rho\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
- **Module** de $z$ : $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$
- **Argument** de $z$ : $\mathrm{Arg}(z) = \theta \mod (2\pi)$.

### Interprétation géométrique

On munit le plan $\mathscr{P}$ affine euclidien d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le point de coordonnées $(x, y)$ s'appelle **le point d'affixe** $z$, on le note parfois $M(z)$.




$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$
$$\overline{OP} = x = \mathrm{Re}(z) = \rho \cos(\theta)$$
$$\overline{OQ} = y = \mathrm{Im}(z) = \rho \sin(\theta)$$
$$OM = \rho = |z|$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(z) &= (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) \mod (2\pi) \\ &= \theta \mod (2\pi)\end{aligned}$$

Si $A$, $B$, $C$ et $D$ sont quatre points du plan d'affixes respectifs $z_A$, $z_B$, $z_C$, et $z_D$ alors :

$$AB = |z_B - z_A| \qquad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \mod (2\pi).$$

### Module et argument d'un produit, d'un quotient

$z'$ désigne un autre complexe quelconque : $z' = x' + \mathrm{i}y' = \rho'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$.

$$zz' = \rho\rho'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} \qquad |zz'| = |z| \times |z'| \qquad \mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \mod (2\pi)$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') \mod (2\pi)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad z^n = \rho^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \qquad |z^n| = |z|^n \qquad \mathrm{Arg}(z^n) = n \,\mathrm{Arg}(z) \mod (2\pi)$$

### Complexes et trigonométrie

- **Formules d'Euler** : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$.
- **Formule de Moivre** : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(\cos(\theta) + \mathrm{i} \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i} \sin(n\theta)$.

### Un nombre complexe remarquable

On note $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On remarque que :

$$\mathrm{j}^3 = 1, \qquad 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0, \qquad \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2.$$

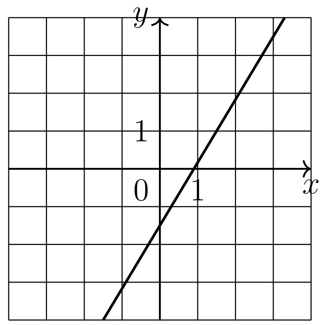
# D) Fonctions usuelles

## 1. Variations, représentation graphique

**Fonctions affines** $f : x \to ax + b$

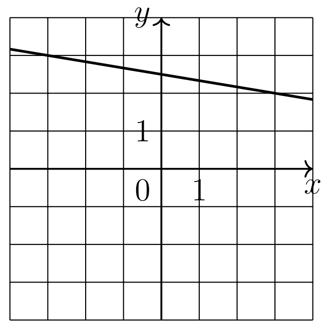
$a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |



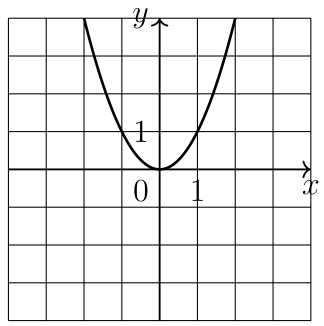

$a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |



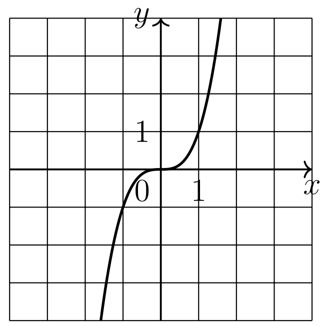

**Fonction carré** $f : x \to x^2$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ ↗ | $+\infty$ |



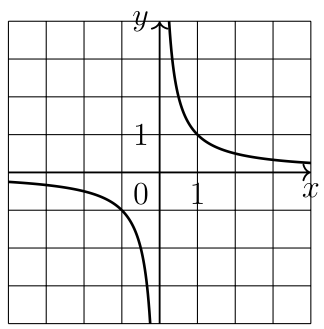

**Fonction cube** $f : x \to x^3$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |



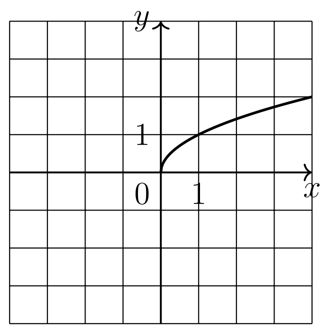

**Fonction inverse** $f : x \to \dfrac{1}{x}$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ ↘ | $-\infty$ | ‖ $+\infty$ ↘ | $0$ |



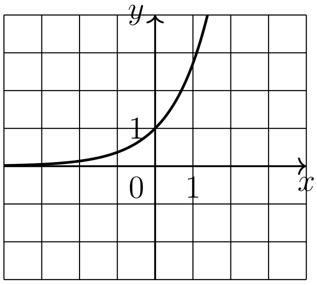

**Fonction racine carré** $f : x \to \sqrt{x}$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |



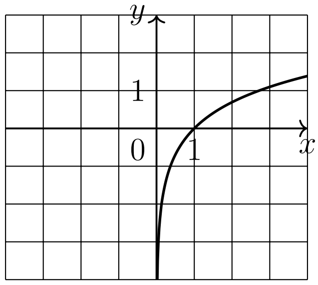
## Fonction exponentielle $f : x \to \mathrm{e}^x$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



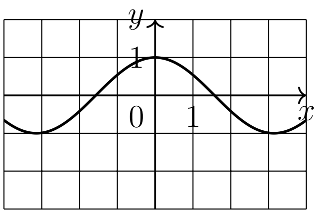

## Fonction logarithme népérien $f : x \to \ln(x)$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



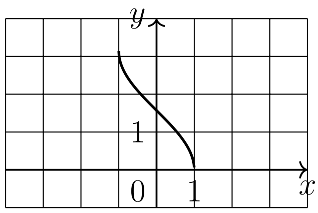

## Fonction cosinus $f : x \to \cos(x)$

| $x$ | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |



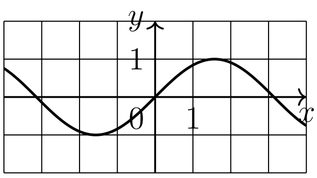

## Fonction arccosinus $f : x \to \arccos(x)$

| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\pi$ | $\searrow$ | $0$ |



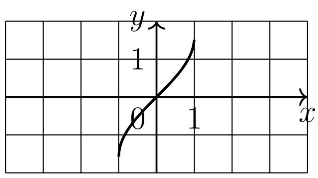

## Fonction sinus $f : x \to \sin(x)$

| $x$ | $0$ | | $\pi/2$ | | $3\pi/2$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ |



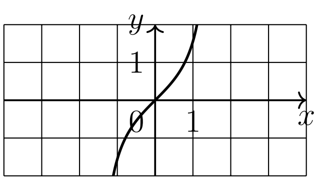

## Fonction arcsinus $f : x \to \arcsin(x)$

| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\pi/2$ | $\nearrow$ | $\pi/2$ |



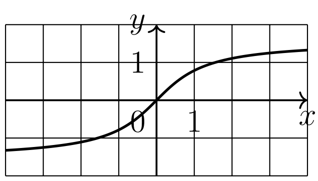

## Fonction tangente $f : x \to \tan(x)$

| $x$ | $-\pi/2$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ $\Vert$ |




## Fonction arctangente $f : x \to \arctan(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\pi/2$ | $\nearrow$ | $\pi/2$ |



## 2. Opérations sur les limites

| $\lim\limits_{b} u$ | $\lim\limits_{b} v$ | $\lim\limits_{b}(u+v)$ | $\lim\limits_{b}(uv)$ | $\lim\limits_{b}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ell \neq 0$ | $0$ | $\ell$ | $0$ | $\pm\infty$ (RS) |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | ? |
| $\ell \neq 0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ (RS) | $0$ |
| $0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | ? | $0$ |
| $\pm\infty$ | $\ell' \neq 0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ (RS) | $\pm\infty$ (RS) |
| $\pm\infty$ | $0$ | $\pm\infty$ | ? | $\pm\infty$ (RS) |
| $+\infty$ | $-\infty$ | ? | $-\infty$ | ? |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | ? |

RS signifie qu'il faut déterminer le signe du résultat grâce à la règle des signes de la multiplication.

Les cases où il y a un ? sont les cases où on ne peut pas donner de résultat général. On appelle ce genre de limite des **formes indéterminées**. C'est au cas par cas qu'il faut trouver la bonne méthode pour arriver à calculer la limite.

**Composée de fonctions** : Soient $b$, $b'$, $b''$ trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $f$ et $g$ deux fonctions telles que $f$ est définie au voisinage de $b$ et $g$ est définie au voisinage de $b'$. Alors :

$$\lim_{x\to b} f(x) = b' \ ; \ \lim_{x\to b'} g(x) = b'' \Rightarrow \lim_{x\to b} g\circ f(x) = b''$$

## 3. Croissances comparées pour les fonctions

Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels strictement positifs

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\beta x^\gamma}}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^\alpha(\ln(x))^\beta = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x} = 0.$$

## 4. Limites usuelles et équivalents classiques

— On pourra, en exercice, remplacer les « boites »($\square$) par n'importe quelle expression du moment que la boite vérifie ce qui est indiqué :

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \Longrightarrow \quad \text{si } \square \to 0,\ e^{\square} - 1 \underset{...}{\sim} \square$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \Longrightarrow \quad \text{si } \square \to 0,\ \ln(1+\square) \underset{...}{\sim} \square$$

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{si } \square \to 1,\ \ln(\square) \underset{...}{\sim} \square - 1$$

$$\text{pour } \alpha \neq 0,\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad \Longrightarrow \quad \text{si } \square \to 0,\ (1+\square)^\alpha - 1 \underset{...}{\sim} \alpha\square$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \Longrightarrow \quad \text{si } \square \to 0,\ \sin(\square) \underset{...}{\sim} \square$$

$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \text{si } \square \to 0,\ \cos(\square) - 1 \underset{...}{\sim} -\frac{\square^2}{2}$$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \Longrightarrow \quad \text{si } \square \to 0,\ \tan(\square) \underset{...}{\sim} \square$$

On en déduit, entre autre, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

— Si $n$ et $p$ sont deux entiers tels que $n \geqslant p$ et si $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$ :

$$a_p x^p + \ldots + a_n x^n \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p \qquad\qquad a_p x^p + \ldots + a_n x^n \underset{x\to \pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

« Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $+\infty$ et $-\infty$ et à son monôme de plus petit degré en 0. »

## 5. Développements limités

— Formules de **Taylor-Young** :

* Au voisinage de 0 : Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle $I$ contenant 0. Alors $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de 0 :

$$f(h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} h^k + o(h^n).$$

* Au voisinage de $x_0$ (***à la limite du programme***) : Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle $I$ et si $x_0 \in I$. Alors $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $x_0$ :

$$f(x_0 + h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n).$$

ou encore

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

— Développements limités usuels :

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^a \underset{x\to 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

# E) Dérivées

## 1. Dérivées usuelles

| $I$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$, $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ si $n < 0$ | $(n \in \mathbb{Z})\ x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ | $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ |
| $\mathbb{R}^{+*}$ | $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\mathbb{R}^{+*}$ | $(\alpha \in \mathbb{R})\ x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $\mathbb{R}$ | $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ |
| $\mathbb{R}$ | $(a > 0)\ a^x$ | $\ln(a) \times a^x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $\mathbb{R}$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ | $\tan(x)$ | $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ |
| $\mathbb{R}$ | $\arctan(x)$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |

## 2. Opérations et dérivées

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un ensemble $\mathscr{D}$. Alors **sous condition d'existence**

$$(u+v)' = u' + v' \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda u)' = \lambda u' \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (u^\alpha)' = \alpha u' \times u^{\alpha-1} \qquad (\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u \qquad (\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \qquad (\cos(u))' = -u'\sin(u) \qquad (\sin(u))' = u'\cos(u)$$

## 3. Tangente

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère du plan.

— Si $f$ est dérivable en $a \in I$, alors $\mathscr{C}$ admet une tangente au point d'abscisse $a$ d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

— Si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $a$ (idem pour la limite en $a^-$).

## F) Primitives

| $f(x)$ | $F(x)$ | $I$ |
|---|---|---|
| $x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ | $\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ |
| $x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ |
| $\ln(x)$ | $x\ln(x) - x$ | $\mathbb{R}^{+*}$ |
| $\tan(x)$ | $-\ln\lvert\cos(x)\rvert$ | $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[_{k\in\mathbb{Z}}$ |
| $1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x)$ | $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[_{k\in\mathbb{Z}}$ |
| $u'(x)(u(x))^n$ $(n \in \mathbb{N})$ | $\dfrac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}$ | $I \subset \mathscr{D}_u$ |
| $\dfrac{u'(x)}{(u(x))^n}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ | $\dfrac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}}$ | $I \subset \mathscr{D}_u$ et $u$ ne s'annule par sur $I$ |
| $u'(x)(u(x))^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$ | $\dfrac{1}{\alpha+1}(u(x))^{\alpha+1}$ | $u$ strictement positive sur $I$ |
| $\dfrac{u'(x)}{(u(x))^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ | $\dfrac{-1}{(\alpha-1)(u(x))^{\alpha-1}}$ | $u$ strictement positive sur $I$ |
| $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln\lvert u(x)\rvert$ | $u$ ne s'annule pas sur $I$ |
| $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ | $\mathrm{e}^{u(x)}$ | $I \subset \mathscr{D}_u$ |
| $\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ | $\arctan(u(x))$ | $I \subset \mathscr{D}_u$ |

# G) Équations différentielles

## 1. Ordre 1

1. Si l'équation de l'énoncé n'est pas sous la forme $y' + a(t)y = b(t)$ (par exemple dans l'énoncé il y a un coefficient devant le $y'$) se ramener à une telle forme. (En faisant attention de ne pas diviser par 0...)

2. **On travaille maintenant avec une équation sous la forme $\boldsymbol{y' + a(t)y = b(t)}$ où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont définies sur un intervalle commun $\boldsymbol{I}$**

   **Cas particuliers à vérifier AVANT de se lancer dans une longue rédaction :**
   Si $a(t)$ **et** $b(t)$ sont des constantes, vous pouvez donner par cœur les solutions :

   $$\mathscr{S}_E = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto C\mathrm{e}^{-at} + \frac{b}{a} \;/\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

   a) On cherche **TOUTES** les solutions de l'équation homogène $(H)$ : $y' + a(t)y = 0$
   On commence par déterminer, sur l'intervalle $I$, une primitive de la fonction $a$. On note $A$ cette primitive.
   Les solutions de l'équation homogène sur $I$ sont alors de la forme

   $$y_H(t) = C\mathrm{e}^{-A(t)} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

   b) On cherche **UNE** solution particulière de l'équation $(E)$ : $y' + a(t)y = b(t)$
   - **Cas particuliers à vérifier AVANT de se lancer dans la méthode de la variation de la constante** :
     * Si $a$ et $b$ sont des fonctions polynômiales, il peut être astucieux de chercher une solution particulière sous forme polynômiale.
     * Si $a$ et $b$ font intervenir le même type de fonctions usuelles (exponentielle, ln,...) il pourra être astucieux de chercher une solution particulière sous la même forme.
     * On peut aussi regarder rapidement si on ne trouve pas une solution particulière parmi les fonctions usuelles simples.
   - Si pas de solution évidente, on applique la **méthode de variation de la constante** :
     On cherche une solution de la forme $y_p(t) = u(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ avec $u$ une fonction dérivable sur $I$.

   c) L'ensemble des solutions de $(E)$ sur $I$ est alors $\mathscr{S}_E = \{t \in I \mapsto y_p(t) + C\mathrm{e}^{-A(t)}/C \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\}$.

3. Condition initiale
   Si on dispose d'une condition initiale, on l'utilise pour déterminer la constante dans la solution générale $y(t)$.

### 2. Ordre 2 à coefficients constants

On cherche à résoudre l'équation $y'' + ay' + by = f$ où $a$ et $b$ sont des **réels** fixés et $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$.

1. On cherche **TOUTES** les solutions réelles de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.
   On écrit alors clairement sur la copie l'équation caractéristique associée puis on résout cette équation.
   - Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ alors les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme :
   $$y_H(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}.$$
   - Si l'équation admet une seule solution réelle $r_0$ alors les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme :
   $$y_H(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{r_0 t}.$$
   - Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes (conjuguées) $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ alors les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme :
   $$y_H(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)).$$
2. On cherche **UNE** solution particulière de l'équation complète $y'' + ay' + by = f$.
   Voici les différents cas où l'énoncé n'est pas obligé vous guider.
   - Si $f$ est une fonction constante, il suffit de chercher une solution particulière constante.
   - Dans toutes les autres situations, le programme de BCPST stipule que l'énoncé doit indiquer sous quelle forme chercher une solution particulière.
   - **Situation que l'on rencontre souvent mais où vous devez normalement être guidés :**
   Si la fonction $f$ est de la forme $P(t)\mathrm{e}^{\omega t}$, où $P$ est un polynôme de degré $n$, on cherche la solution particulière sous la forme :
   $\rightarrow y_p(t) = Q(t)\mathrm{e}^{\omega t}$, avec $Q$ polynôme de degré $n$, si $\omega$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique.
   $\rightarrow y_p(t) = t \times Q(t)\mathrm{e}^{\omega t}$, avec $Q$ polynôme de degré $n$, si $\omega$ est une solution simple de l'équation caractéristique.
   $\rightarrow y_p(t) = t^2 \times Q(t)\mathrm{e}^{\omega t}$, avec $Q$ polynôme de degré $n$, si $\omega$ est une solution double de l'équation caractéristique.
3. Ensemble des solutions
   Les solutions réelles de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$.
4. Conditions initiales
   Si on dispose de conditions initiales, on les utilise pour déterminer les constantes dans la solution générale $y(t)$.

## *Cas particuliers à connaitre par cœur*

- Les solutions réelles de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega$ constante réelle sont les fonctions de la forme $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.
- Les solutions réelles de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$ avec $\omega$ constante réelle sont les fonctions de la forme $y(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$.

# H) Suites numériques

## 1. Suites remarquables

— Terme général d'une suite arithmétique : si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite arithmétique de raison $r\in\mathbb{R}$ alors

$$\forall n\geqslant n_0,\qquad u_n=u_{n_0}+r\times(n-n_0).$$

— Terme général d'une suite géométrique : si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite géométrique de raison $q\in\mathbb{R}$ alors

$$\forall n\geqslant n_0,\qquad u_n=u_{n_0}\times q^{n-n_0}.$$

— Méthode pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique : pour déterminer une expression de $u_n$ en fonction de $n$ lorsqu'on sait que pour tout $n\geqslant n_0$, $u_{n+1}=au_n+b$, avec $a$ et $b$ deux réels ($a\neq 1$ et $b\neq 0$) ne dépendant pas de $n$ :
  * On résout l'équation $x=ax+b$. (*dans la suite je note $\ell$ la solution de cette équation*)
  * On montre que la suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par $v_n=u_n-\ell$ est une suite géométrique.
  * On exprime $v_n$ en fonction de $n$ puis on en déduit $u_n$.

— Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : pour déterminer une expression de $u_n$ en fonction de $n$ lorsqu'on sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$, avec $a$ et $b$ deux réels ($b\neq 0$) ne dépendant pas de $n$ :
  * On résout l'équation caractéristique associée : $x^2=ax+b$.
  * → Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=Ar_1^n+Br_2^n$.
    → Si l'équation caractéristique n'admet qu'une solution réelle $r_0$ alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=(A+Bn)r_0^n$.
    → Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes non réelles $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ alors il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\rho^n(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))$.
  * On détermine ensuite les valeurs de $A$ et $B$ grâce aux valeurs des deux premiers termes de la suite (souvent $u_0$ et $u_1$ mais attention à bien lire l'énoncé).

## 2. Limite des suites remarquables

— Suite arithmétique : soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison $r\in\mathbb{R}$.
Si $r>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et si $r<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

— Suite géométrique : soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison $q\in\mathbb{R}$.
Si $q>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et si $|q|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ et si $q\leqslant -1$, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'admet pas de limite.

## 3. Croissances comparées pour les suites

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement positifs et $q$ un réel. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^\alpha(n)}{n^\beta}=0\ ;\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

Si $q>1$ :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\beta}{q^n}=0\ ;\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{q^n}{n!}=0.$$

Si $|q|<1$ :

$$\lim_{n\to+\infty}n^\beta q^n=0\ ;\qquad \lim_{n\to+\infty}n!q^n=0.$$

## I) Nature et somme des séries usuelles (programme de spé)

**ATTENTION** lorsque vous apprenez vos formules de sommes, apprenez bien le point de départ et d'arrivée du compteur de la somme !!!

— Série géométrique : Si $|q| < 1$ alors la série $\sum q^n$ est absolument convergente et

$$\text{pour } p \in \mathbb{N} \text{ fixé : } \sum_{n=p}^{+\infty} q^k = q^p \times \frac{1}{1-q}.$$

— Série dérivée de la série géométrique : Si $|q| < 1$ alors la série $\sum nq^{n-1}$ est absolument convergente et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

— Série dérivée seconde de la série géométrique : Si $|q| < 1$ alors la série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

— Série exponentielle : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

— Série harmonique : La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

— La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

— **À savoir étudier très rapidement :** pour déterminer la nature et la somme de $\sum nq^n$, on utilise le fait que $nq^n = q \times nq^{n-1}$.

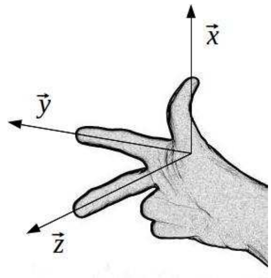
— **À savoir étudier très rapidement :** pour déterminer la nature et la somme de $\sum n^2q^n$, on utilise le fait que $n^2q^n = q^2 \times n(n-1)q^{n-2} + q \times nq^{n-1}$.

## J) Géométrie

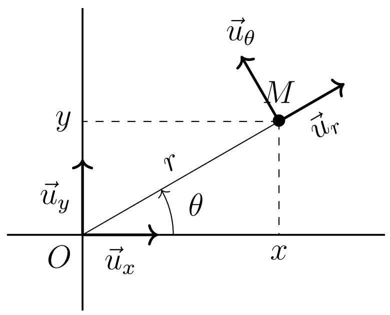
### 1. Repères et coordonnées

— Coordonnées cartésiennes
Suivant les matières, un repère orthonormé peut être noté $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ou $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

— Repères orthonormés directs




— Coordonnées polaires (hors programme)




— $\overrightarrow{u}_r = \cos(\theta)\overrightarrow{u}_x + \sin(\theta)\overrightarrow{u}_y$ et $\overrightarrow{u}_\theta = -\sin(\theta)\overrightarrow{u}_x + \cos(\theta)\overrightarrow{u}_y$.

— $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ .

— $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

— $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_r$.

— Lorsque la position du point $M$ dépend du temps $t$ ($r$ et $\theta$ dépendent de $t$) :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{u}_r,$$

où $\dot{\theta}$ est la dérivée de $\theta$ par rapport au temps.

### 2. Produit scalaire et norme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$

— Produit scalaire : soit $\overrightarrow{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est défini par :

$$\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i.$$

En fonction des matières et du contexte le produit scalaire peut être noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ ou $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$.

— Norme : $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \rangle}$.

— Orthogonalité : $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

— Inégalité triangulaire : $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leqslant ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$.

— Identité remarquable : $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle + ||\overrightarrow{v}||^2$.

— Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle| \leqslant ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.

Pour toute la suite de cette partie on considère que le plan ou l'espace est muni d'un repère orthonormé.

### 3. Droites du plan et de l'espace

#### a) Dans le plan

- Équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur normal : une équation cartésienne de la droite passant par $A(a,b)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}=(n_1,n_2)$ est :

$$n_1x+n_2y=n_1a+n_2b.$$

- Représentation paramétrique à partir d'un point et d'un vecteur directeur : une représentation paramétrique de la droite passant par $A(a,b)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{d}=(d_1,d_2)$ est

$$\begin{cases} x=a+d_1t \\ y=b+d_2t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

- Coefficient directeur ou pente : pour une droite dont une équation cartésienne est $ax+by=c$ avec $b\neq 0$, le coefficient directeur est $-\dfrac{a}{b}$.

#### b) Dans l'espace

- Système d'équations cartésiennes à partir d'un point et de deux vecteurs normaux : un système d'équations cartésiennes de la droite passant par $A(a,b,c)$ et normale aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{n}=(n_1,n_2,n_3)$ et $\overrightarrow{m}=(m_1,m_2,m_3)$ est :

$$\begin{cases} n_1x+n_2y+n_3z=n_1a+n_2b+n_3c \\ m_1x+m_2y+m_3z=m_1a+m_2b+m_3c \end{cases}.$$

- Représentation paramétrique à partir d'un point et d'un vecteur directeur : une représentation paramétrique de la droite passant par $A(a,b,c)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{d}=(d_1,d_2,d_3)$ est

$$\begin{cases} x=a+d_1t \\ y=b+d_2t \\ z=c+d_3t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

### 4. Cercles dans le plan

Un équation cartésienne du cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon $r$ est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

### 5. Plans dans l'espace

- Équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur normal : une équation cartésienne du plan passant par $A(a,b,c)$ et normal au vecteur $\overrightarrow{n}=(n_1,n_2,n_3)$ est :

$$n_1x+n_2y+n_3z=n_1a+n_2b+n_3c.$$

- Représentation paramétrique à partir d'un point et de deux vecteurs directeurs : une représentation paramétrique du plan passant par $A(a,b,c)$ et dirigé par les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{d}=(d_1,d_2,d_3)$ et $\overrightarrow{h}=(h_1,h_2,h_3)$ est

$$\begin{cases} x=a+d_1t+h_1s \\ y=b+d_2t+h_2s \\ z=c+d_3t+h_3s \end{cases} \quad \text{où } t \text{ et } s \text{ décrivent } \mathbb{R}.$$