Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 4

1. a)
```
from random import random

def simul():
    L=[]
    n=0
    while True:
        n+=1
        if random()<0.5:
            L.append('P')
        else:
            L.append('F')
        if n>=3 and [L[-3],L[-2],L[-1]]==['P','P','F']:
            return L
```
b)
```
def probaA(n):
    approx_proba=0
    for _ in range(1000):
        L=simul()
        if len(L)==n:
            approx_proba+=1
    return approx_proba/1000
```

2. L'événement $\bigcup_{k=3}^{n} B_k$ est réalisé si, et seulement si, l'un au moins des événements B_3, B_4, $\ldots B_n$ est réalisé. Comme l'événement B_k signifie que la succession Pile, Pile, Face est arrivée aux lancers $k-2$, $k-1$, k, on peut reformuler ce que l'on vient de dire en « la succession Pile, Pile, Face est arrivée au moins une fois au cours des n premiers lancers ».

Nous avons montré que $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$.

ATTENTION : *dans ce type de question il faut absolument raisonner par équivalence. On ne pourra pas se contenter d'une phrase du type « si ……alors …… ».*

3. a) Comme il y a une infinité de lancers sans condition, les lancers sont indépendants donc

$$P(B_n) = P(P_{n-2}) \times P(P_{n-1}) \times P(F_n) = \frac{1}{8}.$$

On a :

$$B_n \cap B_{n+1} = (P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) \cap (P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}) = \emptyset,$$

car $P_n \cap F_n = \emptyset$.
De même $B_n \cap B_{n+2} = \emptyset$ et $B_{n+1} \cap B_{n+2} = \emptyset$.
Les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont bien incompatibles deux à deux.
En revanche,

$$B_n \cap B_{n+3} = (P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) \cap (P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3}) \neq \emptyset,$$

donc B_n et B_{n+3} ne sont pas incompatibles.

b) $u_3 = P(U_3) = P(B_3) = P(P_1 \cap P_2 \cap F_3) = \frac{1}{8}$, d'après la question précédente.
$u_4 = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4)$ car B_3 et B_4 sont incompatibles (question précédente).
Donc $u_4 = \frac{1}{4}$.
$u_5 = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5)$ car B_3, B_4 et B_5 sont incompatibles.
Donc $u_5 = \frac{3}{8}$.

Pour tout $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}
u_{n+3} &= P\left(\left(\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k\right) \bigcup B_{n+3}\right) \\
&= P(U_{n+2}) + P(B_{n+3}) - P\left(\left(\bigcup_{k=3}^{n+2} B_k\right) \bigcap B_{n+3}\right) && \text{formule } P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \\
&= P(U_{n+2}) + P(B_{n+3}) - P\left((U_n \cup B_{n+1} \cup B_{n+2}) \bigcap B_{n+3}\right) && \text{réécriture de } \bigcup_{k=3}^{n+2} B_k \\
&= P(U_{n+2}) + P(B_{n+3}) - P\left(U_n \bigcap B_{n+3}\right) && \text{d'après la question précédente} \\
&= u_{n+2} + \frac{1}{8} - P(U_n) \times P(B_{n+3}) && \text{par indépendance de } U_n \text{ et } B_{n+3} \\
&= u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_n.
\end{aligned}$$

c) On a $U_n \subset U_{n+1}$ donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est donc croissante et de plus elle est majorée par 1 donc elle est convergente. Notons ℓ la limite de cette suite.

On a alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+3} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_n = \ell + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\ell$.

Par unicité de la limite, ℓ doit donc vérifier : $\ell = \ell + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\ell$. On obtient que $\ell = 1$.

En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4. a) L'événement U signifie que l'on a obtenu au moins une fois la succession Pile, Pile, Face au cours de l'infinité de lancers effectués.

b) Soit un entier naturel $n \geqslant 3$.

Si la succession Pile, Pile, Face est apparue au moins une fois au cours des n premiers lancers, cela signifie forcément qu'elle est apparue au moins une fois au cours de l'ensemble de tous les lancers.

Cela justifie que $U_n \subset U$.

c) D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a $u_n \leqslant P(U)$.

De plus, $P(U) \leqslant 1$.

On a donc $u_n \leqslant P(U) \leqslant 1$. Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient que $1 \leqslant P(U) \leqslant 1$.

En conclusion, $P(U) = 1$.