

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 12

EXERCICE 1 :

1. a) Soit $x \in]0; +\infty[$. Pour tout $t \in [0; x]$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq t \leq x \\ \Leftrightarrow 1 &\leq e^t \leq e^x && \text{exp strict. croiss. sur } \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 2 &\leq e^t + 1 \leq e^x + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{e^x + 1} &\leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2} && x \mapsto \frac{1}{x} \text{ strict. décroiss. sur } \mathbb{R}^{+*} \end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}}$

- b) Repartons de la question précédente. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0; x], \quad \frac{1}{e^x + 1} &\leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \forall t \in [0; x], \quad \frac{t}{e^x + 1} &\leq \frac{t}{e^t + 1} \leq \frac{t}{2} && t \geq 0 \\ \Rightarrow \int_0^x \frac{t}{e^x + 1} dt &\leq \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq \int_0^x \frac{t}{2} dt && \text{croissance de l'intégrales, les fonctions sont } \mathcal{C}^0 \\ \Rightarrow \frac{1}{e^x + 1} \frac{x^2}{2} &\leq \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq \frac{x^2}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{e^x + 1} &\leq f(x) \leq \frac{1}{2} && \frac{2}{x^2} > 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\forall x > 0, \frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.}$

- c) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

Or $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

2. a) • Comme $t \mapsto e^t + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continue.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt$ est la primitive de $t \mapsto \frac{t}{e^t + 1}$ qui s'annule en 0 et cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (donc aussi sur $\mathbb{R}^{+*}$).

De plus $x \mapsto \frac{2}{x^2}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc en particulier sur $]0; +\infty[$.

Ainsi par produit, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0; +\infty[.}$

- De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt + \frac{2}{x^2} \frac{x}{e^x + 1} = -\frac{4}{x^3} \left(\int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt - \frac{x^2}{2(e^x + 1)} \right)$$

Donc on a $\boxed{\text{pour tout } x > 0, f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x) \text{ avec } g(x) = \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt - \frac{x^2}{2(e^x + 1)}}.$

- b) • g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{x}{e^x + 1} - \frac{1}{2} \frac{2x(e^x + 1) - x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{x^2 e^x}{2(e^x + 1)^2}.$$

Donc $g'(x) > 0$, et ainsi $\boxed{g \text{ est croissante sur }]0; +\infty[.}$

- De plus $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ donc $\boxed{\text{pour tout } x > 0, g(x) \geq 0.}$

On pourra remarquer aussi qu'avec l'aide de la question 1.b), on a directement le signe de $g(x)$.

- Comme $f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$ et que $g(x) \geq 0$, on a $f'(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Or on a montré que f est continue en 0. $\boxed{f \text{ est donc décroissante sur } \mathbb{R}^+}.$

3. a) On pose $h(t) = e^t + 1 - t$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $h'(t) = e^t - 1 \geq 0$. Donc h est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $h(0) = 2$, on a pour tout $t \geq 0$,

$$h(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^t + 1 - t \geq 0 \Leftrightarrow e^t + 1 \geq t \Leftrightarrow \frac{t}{e^t + 1} \leq 1 \text{ car } e^t + 1 > 0$$

On a donc pour tout $t \geq 0$, $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$.

- b) D'après la question précédente, pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq \frac{t}{e^t + 1} \leq 1$.

En intégrant la relation précédente sur $[0; x]$ avec $x > 0$, on obtient $0 \leq \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \leq x$ puis en multipliant par $\frac{2}{x^2}$ qui est un réel positif, on obtient $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$.

Enfin comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 2 :

1. $I_0 = \int_0^1 \ln(1+x) dx = [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1$.
2. a) Pour tout $x \in [0; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \geq 0$ et comme $x+1 \geq 1$, $\ln(x+1) \geq 0$ donc $x^n \ln(1+x) \geq 0$.
De plus, $x \mapsto x^n \ln(1+x)$ est continue sur $[0; 1]$ donc, par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) \ln(x+1) dx = \int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1) dx$.
Or pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $\ln(x+1) \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leq 0$, et ainsi la suite (I_n) est décroissante.
- c) (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.
3. a) Pour tout $x \in [0; 1]$, $\ln(x+1) \leq \ln(2) \leq 1$. Comme $x^n \geq 0$, on en déduit que, pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n \ln(x+1) \leq x^n$.
- b) Les fonctions $x \mapsto x^n \ln(1+x)$ et $x \mapsto x^n$ sont continue sur $[0; 1]$, donc par croissance de l'intégrale, on obtient $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.
- c) On a donc démontré que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
4. a) On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) & u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v'(x) = x^n & v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$. Par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx. \end{aligned}$$

- b) Pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ donc $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}.$$

Grâce à la question précédente on obtient :

$$\frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

- c) D'après la question précédente :

$$\frac{n \ln 2}{n+1} - \frac{n}{(n+2)(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n \ln 2}{n+1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln 2}{n+1} = \ln 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+2)(n+1)} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \ln 2$.