G2E 2016
Correction

Problème 1 :

On peut remarquer que dans ce sujet, on adopte l'abus de notation qui consiste à confondre $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, chose que je n'aime pas du tout faire normalement....

Partie A : Une matrice particulière

1. (a) On remarque que :
$$\mathrm{rg}(J_n) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_n \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_{n-1} \end{matrix}$$
Donc $\boxed{\mathrm{rg}(J_n) = n}$.
La matrice J_n est donc inversible, on en déduit donc que $\boxed{\ker(J_n) = \{0\}.}$

(b) On a, pour tout $i \in [\![2; n]\!]$, $J_n e_i = e_{i-1}$ et $J_n e_1 = e_n$.
Donc la famille $(J_n e_1, \dots, J_n e_n)$ est en fait constitué des mêmes vecteurs que la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi $\boxed{(J_n e_1, \dots, J_n e_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^n.}$

(c) On peut remarquer que la matrice J_n est la matrice de passage entre la base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ et la base orthonormale $(J_n e_1, \dots, J_n e_n)$.
D'après notre cours, on peut donc affirmer, sans calculs, que $\boxed{{}^tJ_n J_n = I_n \text{ et } J_n^{-1} = {}^tJ_n.}$

2. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a alors :
$$J_n X = X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_2 \\ \vdots \\ x_n = x_{n-1} \\ x_1 = x_n \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n.$$
Donc il existe des vecteurs X non nuls tels que $J_n X = X$, ce qui signifie que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } J_n}$ et de plus les sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$

3. (a) $\boxed{u_n = (1, 1, \dots, 1)} \neq 0$, donc $\boxed{u_n \text{ est un vecteur propre de } J_n}$ associé à la valeur propre 1.

(b) On a
$$J_n \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi \times 2}{n}} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi \times (n-1)}{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi \times 2}{n}} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi \times (n-1)}{n}} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi \times 2}{n}} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi \times (n-1)}{n}} \end{pmatrix}.$$
De plus, $u_k \neq 0$, donc $\boxed{u_k \text{ est bien un vecteur propre de } J_n \text{ associé à la valeur propre } \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}.}$
On vient de montrer que tous les complexes de la forme $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont des valeurs propres de J_n
On a donc $\left\{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![1; n]\!]\right\} \subset \mathrm{sp}(J_n)$.
Or J_n ne peut pas admettre plus de n valeurs propres. Donc $\mathrm{sp}(J_n) = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![1; n]\!]\right\}$.
J_n admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ donc $\boxed{J_n \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C}.}$

Partie B : Cas où $n = 4$

1. (a) En utilisant les notations de la partie A, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de vecteurs propres de J_4 associée aux valeurs propres i, -1, $-$i et 1.

On a donc $J_4 = PDP^{-1}$ avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

On a alors $\boxed{{}^t\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$

On remarque que ${}^t\overline{P}P = 4I_4$, donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}\,{}^t\overline{P}.}$

(b) $\boxed{J_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_4^4 = I_4.}$

2. (a) On peut tout de suite remarquer que $\mathscr{E} = \mathrm{Vect}(I, J_4, J_4^2, J_4^3)$.
Ainsi, $\mathscr{E}$ est un sous-espace engendré par une famille d'éléments de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ donc
$\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_4(\mathbb{C}).}$
La famille (I, J_4, J_4^2, J_4^3) est génératrice de $\mathscr{E}$. De plus cette famille est libre car :

$$aI_4 + bJ_4 + cJ_4^2 + dJ_4^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Donc $\boxed{(I, J_4, J_4^2, J_4^3) \text{ est une base de } \mathscr{E} \text{ et } \dim(\mathscr{E}) = 4.}$

(b) On a vu que $J_4 = PDP^{-1}$. On en déduit que :

$$J_4^2 = PDP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \qquad \text{et} \qquad J_4^3 = PD^3P^{-1}.$$

Or, on a aussi $I = PIP^{-1}$ donc si $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ est une matrice quelconque de $\mathscr{E}$, on a

$$A = aPIP^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} + dPD^3P^{-1} = P(aI + bD + cD^2 + dD^3)P^{-1}.$$

On a donc $\boxed{A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } \Delta = aI + bD + cD^2 + dD^3 \text{ qui est bien une matrice diagonale.}}$
On vient de montrer que A est semblable à la matrice diagonale Δ. Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et les valeurs propres d'une matrice diagonale se lisent sur sa diagonale.

Comme $D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D^3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$\boxed{\mathrm{sp}(A) = \{\underbrace{a - c + \mathrm{i}(b - d)}_{\lambda_1}, \underbrace{a - b + c - d}_{\lambda_2}, \underbrace{a - c + \mathrm{i}(d - b)}_{\lambda_3}, \underbrace{a + b + c + d}_{\lambda_4}\}.}$$

3. (a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(k)$: « $A^k = P\Delta^k P^{-1}$ » est vraie pour tout entier k.
Pour $k=0$: d'une part $A^0 = I$ et d'autre part $P\Delta^0 P^{-1} = PIP^{-1} = I$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.
On a alors
$$A^{k+1} = A^k \times A = P\Delta^k P^{-1} \times P\Delta P^{-1} = P\Delta^{k+1}P^{-1}.$$
Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifié.
Grâce au principe de récurrence, on a montré que pour tout entier naturel k, $A^k = P\Delta^k P^{-1}$.
Donc $\boxed{A^k = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^4 \end{pmatrix} P^{-1}.}$

(b) On a $\lambda_4 = a+b+c+d = 1$. Donc $\lambda_4^k = 1$ pour tout k et ainsi, $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_4^k = 1.}$
De plus, $\lambda_1 = a - c + \mathrm{i}(b-d)$, donc $|\lambda_1|^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$.
Or $0 \leqslant a < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} < -c \leqslant 0$, donc $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} < a-c < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ et ainsi $(a-c)^2 < \dfrac{1}{8}$.
De même, $(b-d)^2 < \dfrac{1}{8}$.
On en déduit que $|\lambda_1| < 1$ et donc $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_1^k = 0.}$
De même, on montre que $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_3^k = 0}$ $(\lambda_3 = a - c + \mathrm{i}(d-b))$.
Pour finir, $\lambda_2 = a - b + c - d$. Or $0 \leqslant a < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} < -b \leqslant 0$, $0 \leqslant c < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} < -d \leqslant 0$ donc :
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < a - b + c - d < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Ainsi, $|\lambda_2| < 1$ et donc $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_2^k = 0.}$

(c) Comme $\Delta^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^4 \end{pmatrix}$, on a $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \Delta^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta.}$
On obtient alors $\boxed{P\delta P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \end{pmatrix}}$.
On peut remarquer alors que $P\delta P^{-1} = \lim\limits_{k\to+\infty} P\Delta^k P^{-1} = \lim\limits_{k\to+\infty} A^k$.
Cela peut s'interpréter en disant qu'au bout d'un très grand nombre de semaines la localisation de la contamination est équiprobable, et ce quel que soit l'échantillon initialement contaminé.

Partie C : Quand un laboratoire choisit les échantillons

1. (a) D'après le cours de sup, $\boxed{\mathrm{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n}$.
Si on numérote les échantillons de 1 à n, on peut considérer que l'univers Ω de notre expérience (choisir une partie des échantillons) est $\mathscr{P}(E)$.
L'énoncé nous dit que les choix d'une partie des échantillons est équiprobable. On a donc $P(X=k) = \dfrac{\mathrm{card}([X=k])}{\mathrm{card}(\mathscr{P}(\mathscr{E}))}$.
Or, il y a $\dbinom{n}{k}$ parties à k éléments de $\mathscr{E}$ et l'événement $[X=k]$ correspond au fait de sélectionner k échantillons parmi les n.

On a donc bien $\boxed{P(X=k)=\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}.}$

(b) On peut remarquer que $X(\Omega)=[\![1;n]\!]$ et, pour tout $k\in X(\Omega)$, $P(X=k)=\dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{n-k}$.

Donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \dfrac{1}{2}.}$

(c) D'après notre cours $E(X)=n\times\dfrac{1}{2}$. $\boxed{\text{Le nombre moyen d'échantillons analysés par le laboratoire est } \dfrac{n}{2}.}$

2. On cherche ici n tel que $P(X\geqslant 1)>0,99$.

Or $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\dfrac{1}{2^n}$.

On veut donc n tel que $1-\dfrac{1}{2^n}>0,99 \Leftrightarrow 2^n>100 \Leftrightarrow n\geqslant 7$.

$\boxed{\text{Il faut au moins 7 échantillons dans l'usine pour pouvoir être sûr à plus de 99\% qu'au moins un échantillon est analysé.}}$

Partie D : Quand deux laboratoires choisissent les échantillons

1. (a) Le choix des deux laboratoires sont indépendants et le choix de la partie des échantillons analysés est toujours équiprobable.

On sait dans cette question que le premier laboratoire a choisi une partie $\mathscr{P}_1$ d'échantillons telle que $\operatorname{card}(\mathscr{P}_1)=k$.

On souhaite calculer alors la probabilité que L_2 ait choisi une partie $\mathscr{P}_2$ contenant $\mathscr{P}_1$. Pour construire une telle partie $\mathscr{P}_2$ il faut prendre les éléments de $\mathscr{P}_1$ et les compléter avec une partie de $\overline{\mathscr{P}_1}$. Or il y a 2^{n-k} parties de $\overline{\mathscr{P}_1}$ lorsque $\mathscr{P}_1$ contient k éléments.

Ainsi, il existe 2^{n-k} parties $\mathscr{P}_2$ contenant $\mathscr{P}_1$ sachant que $X_1=k$.

On a donc bien $\boxed{P_{[X_1=k]}(B)=\dfrac{2^{n-k}}{2^n}=\dfrac{1}{2^k}.}$

(b) La famille d'événements $([X_1=0],\dots,[X_1=n])$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(B)&=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P_{[X_1=k]}(B)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2^k}\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{1}{2^k}\times 1^{n-k}\\
&=\frac{1}{2^n}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

On a obtenu $\boxed{P(B)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n.}$

2. (a) On a par exemple $P([X_1=0]\cap[Y=n])=0$ car l'événement $[X_1=0]$ implique que $\mathscr{P}_1$ est vide et donc $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ est aussi vide et donc l'événement $[X_1=0]\cap[Y=n]$ est impossible.

Or $P(X_1=0)=\dfrac{1}{2^n}$ et $P(Y=n)\neq 0$ car l'événement $[Y=n]$ est l'événement $[\mathscr{P}_1=E]\cap[\mathscr{P}_2=E]$.

Donc $P([X_1=0]\cap[Y=n])\neq P(X_1=0)\times P(Y=n)$.

$\boxed{X_1 \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

(b) Si $i>k$, on a $P_{[X_1=k]}(Y=i)=0$ car la partie $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ est de cardinal inférieur ou égal à celui de $\mathscr{P}_1$.

Si $0\leqslant i\leqslant k\leqslant n$, pour calculer la probabilité que l'événement $[Y=i]$ soit réalisé sachant que $[X_1=k]$ est réalisé, il faut compter le nombre de parties $\mathscr{P}_2$ telles que $\operatorname{card}(\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2)=i$ sachant que

$\text{card}(\mathscr{P}_1 = k)$. Une telle partie $\mathscr{P}_2$ est constitué de i éléments choisis dans $\mathscr{P}_1$ et d'une partie de $\overline{\mathscr{P}_1}$. Il y a $\binom{k}{i}$ façon de choisir les i éléments de $\mathscr{P}_1$ et 2^{n-k} parties dans $\overline{\mathscr{P}_1}$. Par principe multiplicatif, on a

$$P_{[X_1=k]}(Y = i) = \frac{\binom{k}{i}2^{n-k}}{2^n} = \binom{k}{i}\frac{1}{2^k}.$$

(c) La famille d'événements $([X_1 = 0], \dots, [X_1 = n])$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(Y = i) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P_{[X_1=k]}(Y = i) \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} 0 + \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n} \times \binom{k}{i}\frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=i}^{n} \frac{n!}{(n-k)!i!(k-i)!} \times \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{n!}{i!2^n}\sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{j!(n-i-j)!} \times \frac{1}{2^{n-j}} \qquad \text{avec } j = n-k \\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!2^{n+i}}\sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \times \frac{1}{2^{n-i-j}} \times 1^j \\
&= \binom{n}{i}\frac{1}{2^{n+i}}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i}\frac{1}{4^i}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{Y \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{4}.}$$

3. (a) $k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

(b) On peut commencer par remarquer que :

$$\sum_{(\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)\in\mathscr{P}(E)^2} \text{card}(\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2) = \sum_{k=0}^{n} k\,\text{card}([Y = k]).$$

De plus, dans notre expérience les deux laboratoires choisissent de façon indépendante et équiprobable leurs échantillons donc $P(Y = k) = \frac{\text{card}([Y = k])}{\text{card}(\mathscr{P}(E)^2)} = \frac{\text{card}([Y = k])}{4^n}$.

Ainsi,

$$\sum_{(\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2)\in\mathscr{P}(E)^2} \text{card}(\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2) = 4^n\sum_{k=0}^{n} kP(Y = k) = 4^n E(Y) = 4^n \times n \times \frac{1}{4} = n4^{n-1}.$$

Remarque : nous ne nous sommes pas servi de la question précédente car nous avons reconnu une loi usuelle dans la loi de Y mais si on ne reconnait pas la loi de Y, il faut utiliser la question 3.(a) pour calculer $E(Y)$.

Problème 2 :

Partie A : Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale

1. (a) On sait que $t^\alpha = o(\mathrm{e}^t)$ quel que soit le réel α, donc pour tout réel x, $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x+1} = 0.}$

   Par définition d'une limite, on sait qu'il existe $T \geqslant 1$ tel que :

$$\forall t \in [1;+\infty[, \qquad t \geqslant T \Longrightarrow \mathrm{e}^{-t} \underbrace{t^{x+1}}_{=t^2\times t^{x-1}} \leqslant 1 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leqslant \frac{1}{t^2}}.$$

   (b) Quel que soit le réel x, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $[1;+\infty[$.

   De plus, pour tout $t \geqslant T$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et on sait que $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   Par critère de majoration sur les intégrales de fonctions positives, on peut en déduire que $\displaystyle\int_T^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   Et enfin, comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $[1;T]$, on peut affirmer que $\boxed{\text{pour tout réel } x, \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$

2. (a) Si $x \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur $[0;1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   Si $x < 1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0;1]$. Le problème de convergence se pose donc en 0.

   Soit $A \in]0;1]$. Si $x \neq 0$, $\displaystyle\int_A^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x}t^x\right]_A^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}A^x$.

   Or, si $x > 0$, $\lim\limits_{A\to 0} A^x = 0$ et si $x < 0$, $\lim\limits_{A\to 0^+} A^x = +\infty$.

   Donc si $x > 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{x}$, et si $x < 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

   Pour le cas $x = 0$, on a $\displaystyle\int_A^1 \frac{1}{t} = -\ln(A)$ et $\lim\limits_{A\to 0^+} -\ln(A) = +\infty$, donc $\displaystyle\int_0^1 t^{-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

   En conclusion, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente si, et seulement si, } x > 0 \text{ et pour } x > 0, \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.}$

   (b) Pour tout $t \in]0;1]$, $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$, donc :

$$\forall t \in]0;1] 0 \leqslant \mathrm{e}^{-1}t^{x-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leqslant t^{x-1}.$$

   Si $x > 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente donc par critère de majoration pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   Si $x \leqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente donc $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-1}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente et donc, par critère de minoration pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

   En conclusion, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente si, et seulement si, } x > 0.}$

3. D'après les questions 1. et 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

   Donc $\boxed{\text{le domaine de définition de } \Gamma \text{ est } \mathbb{R}^{+*}.}$

Partie B : Quelques propriétés de cette fonction

1. (a) Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \geqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale $\Gamma(x) \geqslant 0$.

De plus, $\Gamma(x) \neq 0$ car si on avait $\Gamma(x) = 0$, on aurait $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = 0$ avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ fonction continue et positive donc, d'après un résultat de cours, $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} = 0$ pour tout $t \in [0;+\infty[$ ce qui est absurde.

Ainsi, $\boxed{\Gamma(x) > 0.}$

(b) Soit $x > 0$. $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. On pose, pour $t \geqslant 0$:

$$\begin{array}{ll} u(t) = t^x & u'(t) = xt^{x-1} \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t} & v(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. Par théorème d'intégration par parties généralisé, comme $\Gamma(x+1)$ est convergente, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ qui est convergente et

$$\Gamma(x+1) = \lim_{A\to+\infty} -A^x\mathrm{e}^{-A} + 0^x\mathrm{e}^{-0} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

On a bien, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$

(c) $\boxed{\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.}$

Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\Gamma(n) = (n-1)!$ » est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, $(n-1)! = 0! = 1$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
D'après la question précédente, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.
Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!.}$

2. (a) La fonction Γ étant définie en 1, le fait de savoir qu'elle admet une limite en 1 impose que cette limite soit égale à son image en 1. On a donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1} \Gamma(x) = \Gamma(1) = 1.}$

Par caractérisation séquentielle de la limite, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty, n\in\mathbb{N}} \Gamma(n)$.

Or $\Gamma(n) = (n-1)!$. Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty.}$

Pour finir, on a montré que $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$.

Donc par produit de limites, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty}$.

(b) Par caractérisation séquentielle, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(n)}{n}$.

Or $\dfrac{\Gamma(n)}{n} = \dfrac{(n-1)!}{n} = \dfrac{n!}{n^2}$ et on sait que $n^2 = o(n!)$. Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty.}$

3. (a) $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.}$

Comme la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire, on peut en déduire que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.}$

(b) Par définition, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

On pose alors $u=\sqrt{2t}$. La fonction $t\mapsto\sqrt{2t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On a de plus $\mathrm{d}u=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et u varie de 0 à $+\infty$.

Grâce au théorème de changement de variable généralisé, comme on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\pi}.$$

On a donc $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.}$

(c) On remarque que :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\
&\vdots\\
&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\times\ldots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{2n-1}{2}\times\frac{2n-3}{2}\times\ldots\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2^n}\times\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots\times3\times2\times1}{2n(2n-2)\ldots\times4\times2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ » est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$, $\dfrac{0!}{2^0 0!}\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Soit maintenant $n\in\mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
D'après la question B. 1. (b),

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{2n+1}{2}\times\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\\
&=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}\\
&=\frac{(2n+2)!}{2(n+1)2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}=\frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \Gamma(n)=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.}$

Pour être rigoureuse j'ai fait la récurrence, mais vu la longueur de l'épreuve il est possible qu'aux concours le premiers calcul ai suffit.

Partie C : Une densité de probabilité

1. (a) La fonction $x \mapsto x^{a-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda x}$ aussi.
Par produit, $f_{a,\lambda}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
De plus, $f_{a,\lambda}$ est nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc continue sur cet intervalle.
Ainsi, $\boxed{f_{a,\lambda} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*.}$
De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{a,\lambda}(x)$ est finie si, et seulement si $a-1 \geqslant 0$.
Si $a>1$, on a alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{a,\lambda}(x) = 0 = f_{a,\lambda}(0)$ donc $f_{a,\lambda}$ est continue en 0.
Si $a=1$, on a alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{a,\lambda}(x) = \dfrac{\lambda}{\Gamma(1)} = \lambda \neq f_{a,\lambda}(0)$ donc $f_{a,\lambda}$ n'est pas continue en 0.
Ainsi, $\boxed{f_{a,\lambda} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ si, et seulement si } a>1.}$

(b) Pour tout $x>0$, $f'_{a,\lambda}(x) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\left(-\lambda x + (a-1)\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} x^{a-2}$.

$\boxed{\text{Si } a \leqslant 1 \text{ alors } f_{a,\lambda} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}.}$

$\boxed{\text{Si } a>1,\ f_{a,\lambda} \text{ est croissante sur } \left]0;\dfrac{a-1}{\lambda}\right] \text{ et décroissante sur } \left[\dfrac{a-1}{\lambda};+\infty\right[.}$

2. (a) On a $f_{1,\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\boxed{\text{On reconnait la densité d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$

(b) La fonction $f_{a,\lambda}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et est positive sur $\mathbb{R}$ car λ et a sont strictement positifs.
De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et nulle.
Enfin, on a, grâce au changement de variable $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant $t=\lambda x$, on a :

$$\int_0^{+\infty} f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^{a-1}\lambda\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\,\mathrm{d}t = 1.$$

$\boxed{f_{a,\lambda} \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

(c) Notons G la fonction de répartition de Y et F celle de X.
X et Y sont à valeurs positives donc pour tout $x \leqslant 0$, $G(x) = F(x) = 0$.
Pour $x>0$, $G(x) = P(Y \leqslant x) = P\left(X \leqslant \dfrac{\lambda'}{\lambda}x\right) = F\left(\dfrac{\lambda'}{\lambda}x\right)$.
Comme $f_{a,\lambda}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc par composée, G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et est continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, Y est une variable à densité et une densité de Y s'obtient en dérivant la fonction de répartition là où c'est possible et en complétant les points manquants.
On remarque alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $G'(x) = \dfrac{\lambda'}{\lambda} f_{a,\lambda}\left(\dfrac{\lambda'}{\lambda}x\right) = f_{a,\lambda'}(x)$.

$\boxed{\text{Une densité de } Y \text{ est donc } f_{a,\lambda'}.}$

3. Sous réserve de convergence absolue

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\mathrm{e}^{-\lambda x}x^a\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^a\frac{\mathrm{d}t}{\lambda} \qquad \text{on a posé } t=\lambda x \\ &= \frac{1}{\lambda\Gamma(a)}\Gamma(a+1) = \frac{a}{\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \dfrac{a}{\lambda}.}$

4. (a) Pour $x < 0$, on a bien $F'_{a,\lambda}(x) = f_{a,\lambda}(x)$.
Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
F'_{a,\lambda}(x) &= -\sum_{k=0}^{a-1} \frac{1}{k!}(-\lambda x + k)\lambda(\lambda x)^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x} \\
&= -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(-\sum_{k=0}^{a-1}\frac{1}{k!}(\lambda x)^k + \sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(k-1)!}(\lambda x)^{k-1}\right) \\
&= -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(-\sum_{k=0}^{a-1}\frac{1}{k!}(\lambda x)^k + \sum_{k=0}^{a-2}\frac{1}{k!}(\lambda x)^{k}\right) \\
&= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \times \frac{(\lambda x)^{a-1}}{(a-1)!} \\
&= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\mathrm{e}^{-\lambda x}x^{a-1} = f_{a,\lambda}(x)
\end{aligned}$$

$\boxed{F_{a,\lambda} \text{ est bien une primitive de } f_{a,\lambda} \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$

(b) Grâce à la question précédente, comme $t > 0$:

$$\begin{aligned}
P(X > t) &= \int_t^{+\infty} f_{a,\lambda}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} F_{a,\lambda}(x) - F_{a,\lambda}(t) \\
&= 0 - F_{a,\lambda}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{a-1}\frac{(\lambda t)^k \mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(X > t) = \sum_{k=0}^{a-1}\frac{(\lambda t)^k \mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!}}$$

(c) Notons pour l'instant β le paramètre de la loi de Poisson suivie par Z.
On a alors $P(Z < a) = \sum_{k=0}^{a-1} P(Z = k) = \sum_{k=0}^{a-1}\frac{\mathrm{e}^{-\beta}\beta^k}{k!}$.

$\boxed{\text{Donc on a } P(X > t) = P(Z < a) \text{ avec } Z \text{ qui suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda t.}$