Programme de colle de la semaine n^o 9

24 au 28 novembre 2025

Algèbre : révisions sur les matrices

Revoir le cours de sup sur les matrices. Aucune démonstration sur cette partie ne pourra être posée en question de cours mais les colleurs pourront vous demander des définitions (transposée, inverse, déterminant, rang,....), des propriétés (transposée d'une somme ou d'un produit, inverse d'un produit,...).

Après la question de cours, il vous sera demandé de résoudre l'un des trois exercices situé sur la page suivante.

Probabilités : Généralités sur les variables aléatoires réelles

reprendre les programmes précédents

Probabilités : Variables aléatoires réelles finies ou discrètes

- Définitions : VAR discrète, VAR finie, loi de probabilité d'une VAR finie ou discrète.
- Les événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements, théorème de caractérisation de la loi d'une VAR discrète.
- Fonction de répartition : c'est une fonction en escalier (observation sur un exemple), lien entre fonction de répartition et loi de la VAR.
- Espérance : définition, théorème de transfert, **si $\boldsymbol{X(\Omega) \subset [a;b]}$ alors $\boldsymbol{X}$ admet une espérance et $\boldsymbol{E(X) \in [a;b]}$.**
- Loi usuelles (révisions de sup) : Bernoulli, binomiale, uniforme. Pour chacune des lois usuelles : explication de la situation permettant de reconnaitre la loi, définition de la loi, espérance, variance (sauf uniforme).
- Loi usuelles infinies : loi géométrique (**espérance**, variance), propriété du caractère sans mémoire d'une variable qui suit une loi géométrique, loi de Poisson (**espérance**, variance).
- Simulation en Python des lois usuelles finies ou infinies. (*Traité en cours lundi 17 novembre*)

Analyse : Polynômes à coefficients réels ou complexes

- Définitions et notations : on introduit la notation X qui en BCPST désigne la fonction $x \mapsto x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, notations $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- Opérations sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ et premières propriétés.
- Degré d'un polynôme : définition, opérations sur les degrés, notations $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$.
- Racines d'un polynôme : définition, caractérisation par la factorisation, ordre de multiplicité, pour les polynômes à coefficients réels : α est une racine de multiplicité supérieure ou égale à 2 ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ (**ATTENTION** pas de caractérisation de la multiplicité par l'annulation des dérivées successives), cardinal de l'ensemble des racines est majoré par le degré de P, un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui admet au moins $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine d'un polynôme à coefficients réels alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.
- Factorisation dans $\mathbb{C}$: théorème de D'Alembert-Gauss, factorisation dans $\mathbb{C}$. **Attention : pas de résultat théorique général concernant la factorisation dans $\mathbb{R}$.**

À venir : espaces vectoriels,...

Exercice 1:

Les deux questions sont indépendantes :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$.
   Discuter suivant les valeurs de λ la valeur du rang de la matrice M_λ.
   Indication : pour démarrer le calcul du rang de M_λ on pourra commencer par effectuer l'opération sur les lignes : $L_1 \leftrightarrow L_3$.

Exercice 2:

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de P, Q et n.

Exercice 3:

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$.
2. En déduire que M est inversible et donner une expression de M^{-1} en fonction de I_3 et M.
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n I_3 + b_n M$.
   b) Démontrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
   c) En déduire une expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n, M et I_3.