

Exercices : couples de VAR discrètes

Application directe du cours : faire ses gammes

EXERCICE 1 :

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z) . (On pourra noter B_i « obtenir une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage »)
2. En déduire la loi de Z .

EXERCICE 2 :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n indiscernables au toucher. On prélève successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On note X le numéro du premier jeton prélevé et Y le numéro du second jeton.

1. Donner, en justifiant, la loi de X et son espérance.
2. a) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
b) En déduire la loi de Y .
3. Calculer $\text{cov}(X, Y)$.

EXERCICE 3 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

1. Calculer $P(2X = Y)$.
2. Calculer $P(X < Y)$.

EXERCICE 4 :

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, suivant toutes deux la loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0; 1[$.

1. Déterminer la loi de $|X_1 - X_2|$.
2. Vérifier que $|X_1 - X_2|$ admet une espérance et la calculer.
3. On pose $T = \max(X_1, X_2)$ et $U = \min(X_1, X_2)$.
a) Exprimer $T + U$, $T - U$ et TU en fonction de X_1 et X_2 .
b) En déduire l'existence et la valeur de la covariance de (T, U) .

Sujets de concours

EXERCICE 5 : ORAL AGRO-VÉTO

Soit n un entier naturel non nul.

On dispose de n jetons et de trois urnes numérotées de 1 à 3.

Pour chaque jeton, on choisit une des trois urnes au hasard et avec équiprobabilité puis on place le jeton dans l'urne choisie. Le placement de chaque jeton est indépendant du placement de tous les autres jetons.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons contenus dans l'urne 1 à la fin de l'expérience, et on note Y le nombre d'urnes restées vides à la fin de l'expérience.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n non nul, simule l'expérience aléatoire décrit ci-dessus, et renvoie les valeurs de X et Y obtenues.
2. Dans cette question, $n = 10$. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grand nombre de fois l'expérience et obtenir une valeur approchée de $E(XY)$, $E(X)$ et $E(Y)$.
Que peut-on conjecturer sur la valeur de la covariance du couple (X, Y) ?
3. Dans cette question, $n = 2$.
 - a) Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, puis donner la loi conjointe du couple (X, Y) sous forme de tableau.
 - b) Donner la loi de X , puis celle de Y .
 - c) Calculer la covariance du couple (X, Y) .
4. Dans cette question, on revient au cas général où n est un entier naturel quelconque. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide à la fin de l'expérience, et qui vaut 0 sinon.
 - a) Déterminer la loi de X , et donner la valeur de son espérance.
 - b) En remarquant que $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, calculer $E(Y)$.
 - c) Démontrer que :

$$\forall i \in \{2, 3\}, \quad \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P([X = j] \cap [Y_i = 1]) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}.$$

- d) Calculer alors $E(XY_i)$ pour $i \in \{2, 3\}$. Que vaut cette espérance si $i = 1$?
- e) Calculer la covariance du couple (X, Y) .

EXERCICE 6 : ORAL AGRO-VÉTO

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On étudie les ascendants d'une population masculine. On considère que le nombre d'individus par génération est constant égal à N . On numérote les individus de 0 à $N - 1$.

La génération actuelle est appelée génération 0, celle d'avant génération 1, puis celle d'avant 2 etc.

La génération 1 correspond donc aux pères des individus de la génération 0.

Les choix des pères de chaque individu d'une génération sont indépendants les uns des autres et chaque père a la même probabilité d'être le père d'un des descendants.

1.
 - a) Écrire une fonction Python qui prend en arguments d'entrée k et N et qui retourne une liste $[u_1, \dots, u_k]$ simulant l'ascendance sur k générations d'un individu. u_1 sera le numéro du père de l'individu dont on étudie l'ascendance, u_2 le numéro de son grand-père, etc.
 - b) Écrire une fonction Python qui retourne le numéro de la première génération où deux individus ont un ancêtre commun.
2. On considère un groupe de deux individus (distincts). On note T la génération du premier ancêtre commun aux deux individus.
 - a) Calculer la probabilité que deux individus d'une même génération aient le même père.
 - b) Calculer $P(T > k)$. En déduire la loi de T .
3. On considère maintenant trois individus (distincts). On note V la génération du premier ancêtre commun à au moins deux des trois individus et U le numéro de la génération du premier ancêtre commun aux trois individus. On pose $W = U - V$.
 - a) Calculer la probabilité que trois individus d'une même génération aient le même père.
 - b) Calculer la probabilité que trois individus d'une même génération aient des pères différents.
 - c) Déterminer la loi de V et son espérance.
 - d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_{[V=k]}(W = 0)$ et $P_{[V=k]}(W = i)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$. En déduire la loi de W .
 - e) Déterminer l'espérance de W .
 - f) En déduire l'espérance de U .

EXERCICE 7 : ORAL G2E

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un secrétaire effectue n appels vers n correspondants distincts. À chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est $\frac{1}{3}$. On note X le nombre de clients obtenus. Après ces n recherches, le secrétaire rappelle une fois chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas obtenu la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus lors de la deuxième série d'appels, et Z le nombre total de correspondants obtenus au cours des deux séries d'appels (on a donc $Z = X + Y$).

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X .
2. Montrer que Z suit une loi binomiale de paramètres à déterminer.
3. On suppose désormais que le nombre N de correspondants que le secrétaire cherche à joindre au cours de ces deux séries d'appels suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer dans ce cas la loi de Z .

EXERCICE 8 : ORAL G2E

1. On considère une urne contenant n ($n \in \mathbb{N}^*$) boules noires et m ($m \in \mathbb{N}^*$) boules marrons. On prélève simultanément k boules ($k \in \llbracket 0; n + m \rrbracket$) dans cette urne. À l'aide d'un argument de dénombrement montrer que

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On considère X_1 une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (n, p) et X_2 une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (m, p) . On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes. Montrer que $Z = X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres $(n + m, p)$.
3. On considère maintenant $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi binomiale de paramètres (n, p) .

Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^N X_i$ suit la loi binomiale de paramètres (nN, p) .

Exercices en plus

EXERCICE 9 :

Soit X , Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé.

On suppose que X , Y et Z suivent toutes les trois la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé).

1. Déterminer la loi de la variable $S = X + Y$.
2. Démontrer que $P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}$.

EXERCICE 10 :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e j! k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y .
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

EXERCICE 11 :

Le nombre de blessés à l'œil par un bouchon de champagne arrivant aux urgences ophtalmologique la nuit de la Saint Sylvestre suit une loi de Poisson de moyenne 6. Sachant que les victimes potentielles sont réparties équitablement entre les deux sexes, on note X le nombre de femmes qui figurent parmi ces éborgnés du jour de l'an et Y le nombre d'hommes.

1. Établir les lois de probabilité de X et de Y , préciser leurs espérances et leurs variances (si elles existent).
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la probabilité pour qu'il y ait autant d'hommes que de femmes admis aux urgences.

EXERCICE 12 :

Une urne contient initialement deux boules vertes et une boule noire. À chaque étape, on tire une boule au hasard dans l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur que la boule tirée.

La variable X (resp. Y) le rang de la première boule verte (resp. noire) tirée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable Z_n désigne le nombre de boules vertes dans l'urne après n étapes. Enfin U_n est la variable aléatoire valant 1 si la boule tirée à la $n^{\text{ème}}$ étape est verte et 0 sinon.

1. Déterminer les lois de X et Y .
2. Exprimer Z_n en fonction de certains des $(U_i)_{i \geq 1}$ et déterminer $Z_n(\Omega)$.
3. Calculer $P_{[Z_n=k]}(U_{n+1} = 1)$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.