# *Vocabulaire sur les équations différentielles*

— **Équation différentielle linéaire d'ordre 1 :** c'est une équation de la forme

$$\alpha y' + \beta y = \gamma,$$

où $y$ est l'inconnue (c'est une fonction) et $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des fonctions définies au moins sur un intervalle commun $I$.

— **Équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :** c'est une équation de la forme

$$\alpha y' + \beta y = 0,$$

où $y$ est l'inconnue (c'est une fonction) et $\alpha$ et $\beta$ sont des fonctions définies au moins sur un intervalle commun $I$.

— **Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :** c'est une équation de la forme

$$y'' + ay' + by = f,$$

où $y$ est l'inconnue (c'est une fonction), $a$ et $b$ sont deux réels fixés et $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$.

— **Équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants :** c'est une équation de la forme

$$y'' + ay' + by = 0,$$

où $y$ est l'inconnue (c'est une fonction) et, $a$ et $b$ sont deux réels fixés.

— **Équation caractéristique associée à une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants :** l'équation caractéristique associée à l'équation $y'' + ay' + by = f$ est l'équation de la variable réelle ou complexe $r$ :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

— **Problème de Cauchy d'ordre 1 :** c'est un système de la forme

$$\begin{cases} \alpha y' + \beta y = \gamma \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $y$ est l'inconnue (c'est une fonction), $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des fonctions définies au moins sur un intervalle commun $I$, $t_0$ est un élément de $I$ fixé et $y_0$ un réel fixé.

— **Problème de Cauchy d'ordre 2 à coefficients constants :** c'est un système de la forme

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

où $y$ est l'inconnue (c'est une fonction), $a$ et $b$ sont des réels fixé, $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$, $t_0$ est un élément de $I$ fixé et $y_0$ et $z_0$ des réels ou complexes fixés.

— **Condition(s) initiale(s) :** il s'agit, dans un problème de Cauchy, des données $y(t_0) = y_0$ (et $y'(t_0) = z_0$).

# *Résultats théoriques sur les équations différentielles*

- **Unicité de la solution du problème de Cauchy d'ordre 1 :** Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$ fixés. **Si** les fonctions $a$ et $b$ sont **continues** sur l'**intervalle** $I$ alors le problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
admet une unique solution sur $I$.
- **Unicité de la solution du problème de Cauchy d'ordre 2 :** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$ et $t_0 \in I$ fixés.
**Si** la fonction $f$ est continue sur $I$ **alors** le problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$
admet une unique solution sur $I$.
- **Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : Si** la fonction $a$ est continue sur l'**intervalle** $I$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est
$$\mathscr{S}_H = \left\{ t \in I \mapsto C\mathrm{e}^{-A(t)} \ / \ C \in \mathbb{R} \right\},$$
où $A$ est une primitive de $a$ sur $I$.
- **Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 : Si** les fonctions $a$ et $b$ sont continues sur l'**intervalle** $I$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = b$ est
$$\mathscr{S} = \left\{ t \in I \mapsto C\mathrm{e}^{-A(t)} + y_p(t) \ / \ C \in \mathbb{R} \right\},$$
où $A$ est une primitive de $a$ sur $I$ et $y_p$ une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$.
- **Ensemble des solutions à valeurs réelles d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants :** Soient $a$ et $b$ deux réels fixés.
  * Si $a^2 - 4b > 0$, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est
  $$\mathscr{S}_H = \{ t \in \mathbb{R} \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t} / (A, B) \in \mathbb{R}^2 \},$$
  où $r_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.
  * Si $a^2 - 4b = 0$, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est
  $$\mathscr{S}_H = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto (A + Bt)\mathrm{e}^{-at/2} / (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
  * Si $a^2 - 4b < 0$, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est
  $$\mathscr{S}_H = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-at/2} \left( A\cos\left( \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} t \right) + B\sin\left( \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} t \right) \right) / (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- **Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :** Soient $a$ et $b$ deux réels fixés et $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + ay' + by = f$ est
$$\{ t \in \mathbb{R} \mapsto y_H(t) + y_p(t) \ / \ y_H \in \{\text{solution de } y'' + ay' + by = 0\} \},$$
où $y_p$ est une solution fixée de $y'' + ay' + by = f$.
- **Principe de superposition :** Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions continues sur $I$ et $a$ et $b$ deux réels. Si $y_1$ est une solution sur $I$ de l'équation $y'' + ay' + by = f_1$ et $y_2$ est une solution sur $I$ de l'équation $y'' + ay' + by = f_2$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_1 + f_2$.

# *Méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1*

1. Si l'équation de l'énoncé n'est pas sous la forme $y' + a(t)y = b(t)$ (par exemple dans l'énoncé il y a un coefficient devant le $y'$) se ramener à une telle forme. (En faisant attention de ne pas diviser par 0...)

2. **On travaille maintenant avec une équation sous la forme $\boldsymbol{y' + a(t)y = b(t)}$ où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont définies sur un intervalle commun $\boldsymbol{I}$**

   **Cas particuliers à vérifier AVANT de se lancer dans une longue rédaction :**
   Si $a(t)$ **et** $b(t)$ sont des constantes, vous pouvez donner par cœur les solutions
   $$\mathscr{S}_E = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto C\mathrm{e}^{-at} + \frac{b}{a} \;/\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

   a) On cherche **TOUTES** les solutions de l'équation homogène $(H) : y' + a(t)y = 0$
   On commence par déterminer, sur l'intervalle $I$, une primitive de la fonction $a$. On note $A$ cette primitive.
   Les solutions de l'équation homogène sur $I$ sont alors de la forme
   $$y_H(t) = C\mathrm{e}^{-A(t)} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

   b) On cherche **UNE** solution particulière de l'équation $(E) : y' + a(t)y = b(t)$
   - **Cas particuliers à vérifier AVANT de se lancer dans la méthode de la variation de la constante** :
     * Si $a$ et $b$ sont des fonctions polynômiales, il peut être astucieux de chercher une solution particulière sous forme polynômiale.
     * Si $a$ et $b$ font intervenir le même type de fonctions usuelles (exponentielle, ln,...) il pourra être astucieux de chercher une solution particulière sous la même forme.
     * On peut aussi regarder rapidement si on ne trouve pas une solution particulière parmi les fonctions usuelles simples.
   - Si pas de solution évidente, on applique la **méthode de variation de la constante** :
     On cherche une solution de la forme $y_p(t) = u(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ avec $u$ une fonction dérivable sur $I$.

   c) L'ensemble des solutions de $(E)$ sur $I$ est alors $\mathscr{S}_E = \{t \in I \mapsto y_p(t) + C\mathrm{e}^{-A(t)} / C \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\}$.

3. Condition initiale
   Si on dispose d'une condition initiale, on l'utilise pour déterminer la constante dans la solution générale $y(t)$.

# *Méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants*

On cherche à résoudre l'équation $y'' + ay' + by = f$ où $a$ et $b$ sont des **réels** fixés et $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$.

1. <u>On cherche **TOUTES** les solutions de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.</u>

   On écrit alors clairement sur la copie l'équation caractéristique associée puis on résout cette équation.

   **Si l'énoncé nous indique qu'il faut chercher les solutions à valeurs réelles :**

   — Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ alors les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme : $y_H(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

   — Si l'équation admet une seule solution réelle $r_0$ alors les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme : $y_H(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{r_0 t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

   — Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes (conjuguées) $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ alors les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme :

   $$y_H(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)),\ \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

   **Si l'énoncé nous indique qu'il faut chercher les solutions à valeurs complexes :**

   — Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes distinctes $r_1$ et $r_2$ alors les solutions à valeurs complexes de l'équation homogène sont de la forme : $y_H(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

   — Si l'équation admet une seule solution $r_0$ alors les solutions à valeurs complexes de l'équation homogène sont de la forme : $y_H(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{r_0 t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

2. <u>On cherche **UNE** solution particulière de l'équation complète $y'' + ay' + by = f$.</u>

   Voici les différents cas où l'énoncé n'est pas obligé vous guider.

   — Si $f$ est une fonction constante, il suffit de chercher une solution particulière constante.

   — Dans tous les autres cas, l'énoncé doit vous guider dans la recherche d'une solution particulière.

3. <u>Ensemble des solutions</u>

   Les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$.

4. <u>Conditions initiales</u>

   Si on dispose de conditions initiales, on les utilise pour déterminer les constantes dans la solution générale $y(t)$.

# *Cas particuliers à connaitre par cœur*

— Les solutions réelles de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega$ constante réelle sont les fonctions de la forme $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

— Les solutions réelles de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$ avec $\omega$ constante réelle sont les fonctions de la forme $y(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$.