Programme de colle de la semaine n^o 10

1er au 5 décembre 2025

La démonstration des propriétés en **gras** pourra faire l'objet d'une question de cours.

Analyse : Polynômes à coefficients réels ou complexes

— Définitions et notations : on introduit la notation X qui en BCPST désigne la fonction $x \mapsto x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, notations $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

— Opérations sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ et premières propriétés.

— Degré d'un polynôme : définition, opérations sur les degrés, notations $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$.

— Racines d'un polynôme : définition, caractérisation par la factorisation, ordre de multiplicité, pour les polynômes à coefficients réels : **$\boldsymbol{\alpha}$ est une racine de multiplicité supérieure ou égale à 2 ssi $\boldsymbol{P(\alpha) = P'(\alpha) = 0}$** (**ATTENTION** pas de caractérisation de la multiplicité par l'annulation des dérivées successives), **cardinal de l'ensemble des racines est majoré par le degré de $\boldsymbol{P}$**, un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui admet au moins $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine d'un polynôme à coefficients réels alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

— Factorisation dans $\mathbb{C}$: théorème de D'Alembert-Gauss, factorisation dans $\mathbb{C}$. **Attention : pas de résultat théorique général concernant la factorisation dans $\mathbb{R}$.**

Algèbre : Espaces vectoriels

Note aux colleurs : *en début de semaine, les étudiants n'auront fait qu'une seule séance d'exercices sur les espaces vectoriels. On se limitera donc à des exercices simples et/ou très guidés.*

— $\mathbb{K}$-espace vectoriel : définition, les espaces de référence, quelques règles de calcul (on pourra demander **une ou deux démonstrations parmi** : $\lambda.\overrightarrow{0}_E = \overrightarrow{0}_E$, $\lambda.(-\overrightarrow{u}) = -(\lambda.\overrightarrow{u})$, $\lambda.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}_E$).

— Familles de vecteurs : combinaison linéaire, sous-espace engendré, famille libre, famille génératrice. Propriétés des familles libres et génératrices (cf. cours). Si dans une famille génératrice de E un vecteur est combinaison linéaire des autres alors la famille obtenue en retirant ce vecteur est encore génératrice de E.

— Sous-espaces vectoriels. **Tout sous-espace vectoriel contient le vecteur nul**. **Un sous-espace engendré par une famille de vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de E.**

— **L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel**.

À venir : fin des espaces vectoriels, applications linéaires...