

Exercice : Agro-véto

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) On a ici :

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = f = 0 \\ a = e = i \\ d = h \end{cases}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}, (a, d, g) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \{aI_3 + dA + gA^2, (a, d, g) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \boxed{\text{vect}(I_3, A, A^2)}. \end{aligned}$$

b) D'après la question précédente, $\mathcal{S}$ est un sous-espace engendré par une famille d'éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est donc, d'après notre cours, un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La famille (I_3, A, A^2) est génératrice de $\mathcal{S}$. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

La famille (I_3, A, A^2) est bien libre.

En conclusion, (I_3, A, A^2) est une base de $\mathcal{S}$ et $\dim(\mathcal{S}) = 3$.

3. a) On a $M^2 = PAP^{-1} \times PAP^{-1} = PA^2P^{-1} \neq 0$ car P et P^{-1} sont inversibles et $A^2 \neq 0$.

De plus $M^3 = PA^2P^{-1} \times PAP^{-1} = PA^3P^{-1} = P0P^{-1} = 0$.

Donc $M \in \mathcal{S}'$.

b) (i) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$ et $M^3 = 0$.

Donc $M \in \mathcal{S}'$.

(ii) M^2 étant la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a par exemple $f^2(1, 0, 0) = (2, 0, 2) \neq 0$.

Le vecteur $\vec{x} = (1, 0, 0)$ vérifie bien que $f^2(\vec{x}) \neq 0$.

(iii) Avec le choix fait dans la question précédente on a : $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (-1, 1, 0), (2, 0, 2))$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$a(1, 0, 0) + b(-1, 1, 0) + c(2, 0, 2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ b = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre et $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Comme

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= 0\vec{x} + 1f(\vec{x}) + 0f^2(\vec{x}) \\ f(f(\vec{x})) &= 0\vec{x} + 0f(\vec{x}) + 1f^2(\vec{x}) \\ f(f^2(\vec{x})) &= 0\vec{x} + 0f(\vec{x}) + 0f^2(\vec{x}) \end{aligned}$$

la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.}$

(v) A et M sont deux matrices associées au même endomorphisme f mais dans deux bases différentes donc, d'après la formule de changement de base, $\boxed{\text{il existe } P \text{ matrice inversible telle que } M = PAP^{-1}.}$

c) (i) M^2 étant la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et M^2 étant non nulle, f^2 n'est pas l'application nulle.

$\boxed{\text{Donc il existe nécessairement } \vec{x} \text{ tel que } f^2(\vec{x}) \neq 0.}$

(ii) On cherche tous les réels a, b et c tels que :

$$a\vec{x} + bf(\vec{x}) + cf^2(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\star)$$

En appliquant la fonction f aux deux membres de l'égalité $(\star)$ on obtient :

$$\begin{aligned} af(\vec{x}) + bf^2(\vec{x}) + cf^3(\vec{x}) &= \vec{0} \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ \Rightarrow af(\vec{x}) + bf^2(\vec{x}) &= \vec{0} \text{ car } M^3 = 0 \text{ donc } f^3 = 0 \end{aligned}$$

On applique à nouveau la fonction f et on obtient alors $af^2(\vec{x}) = \vec{0}$ pour les mêmes raisons.
On a donc

$$\begin{aligned} a\vec{x} + bf(\vec{x}) + cf^2(\vec{x}) = \vec{0} &\iff \begin{cases} a\vec{x} + bf(\vec{x}) + cf^2(\vec{x}) = \vec{0} \\ af(\vec{x}) + bf^2(\vec{x}) = 0 \\ af^2(\vec{x}) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \text{car } f^2(\vec{x}) \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre et $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

(iii) Comme

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= 0\vec{x} + 1f(\vec{x}) + 0f^2(\vec{x}) \\ f(f(\vec{x})) &= 0\vec{x} + 0f(\vec{x}) + 1f^2(\vec{x}) \\ f(f^2(\vec{x})) &= 0\vec{x} + 0f(\vec{x}) + 0f^2(\vec{x}) \end{aligned}$$

la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$

A et M sont deux matrices associées au même endomorphisme f mais dans deux bases différentes donc, d'après la formule de changement de base, $\boxed{\text{il existe } P \text{ matrice inversible telle que } M = PAP^{-1}.}$

d) D'après les questions 3.a) et 3.c), $\boxed{M \in \mathcal{S}' \text{ si, et seulement si, } M \text{ est semblable à } A.}$

Problème 1 : Agro-véto

Partie A : Préliminaires

1. $E(X) = \frac{n+1}{2}.$

2. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Comme $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est bien vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

3. Comme X est une variable aléatoire réelle finie, elle admet un moment d'ordre 2 et une variance. De plus :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Partie B : Étude d'un cas particulier

4. Deux possibilités s'offrent à nous après une expérience : soit on a tiré une boule blanche et on a donc ajouté une boule blanche supplémentaire dans l'urne, et dans ce cas $X_1 = 2$, soit on a tiré une boule noire et on a donc ajouté une boule noire supplémentaire dans l'urne et dans ce cas $X_1 = 1$.

Donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ et $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$. (X_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 2 \rrbracket$.)

5. On a $X_2(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$. De plus :

$$P(X_2 = 1) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(B_1)P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})$$

proba composées

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

description de l'expérience

$$P(X_2 = 2) = P((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2))$$

$$= P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2)$$

union disjointe

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

proba composées

$$= \frac{1}{3}$$

$$P(X_2 = 3) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Donc X_2 suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; 3 \rrbracket$.

6. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n) : \ll X_n \text{ suit la loi uniforme sur } \llbracket 1; n+1 \rrbracket \gg$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— D'après les questions précédentes, $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Avant la $n+1^{\text{ème}}$ expérience, l'urne contient au plus $n+1$ boules blanches et au moins une boule blanche.

Donc après la $n+1^{\text{ème}}$ expérience il y a entre 1 et $n+2$ boules blanches. $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1; n+2 \rrbracket$.

Pour tout $k \in X_{n+1}(\Omega)$, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$ on a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k) \\ &= 0 + P(X_n = k-1)P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) + 0 \\ &\text{écriture qui n'a du sens que pour } k \neq 1 \text{ et } k \neq n+2 \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{k-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-k}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, on a $P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$.

Pour $k = n+2$, on a

$$P(X_{n+1} = n+2) = P(X_n = n+1)P_{[X_n=n+1]}(X_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Donc X_{n+1} suit bien une loi uniforme sur $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$.

Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.

7. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$ on a :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i)P_{[X_n=i]}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+2} && i \text{ boules blanches et } n+2 \text{ au total} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Partie C : Retour au cas général

8. $P(B_1) = \frac{N_1}{N}$ et d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{N_1}{N} \times \frac{N_1+1}{N+1} + \frac{N_2}{N} \times \frac{N_1}{N+1} \\ &= \frac{N_1(N_1+1+N_2)}{N(N+1)} = \boxed{\frac{N_1}{N}}. \end{aligned}$$

9. a) D'après la description des expériences successives, on a $X_{n-1}(\Omega) = \llbracket N_1; N_1+n-1 \rrbracket$.

Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{k \in \llbracket N_1; N_1+n-1 \rrbracket}$:

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1} = k)P_{[X_{n-1}=k]}(B_n) \\ &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(X_{n-1} = k) \times \frac{k}{N+n-1}. \end{aligned}$$

On obtient donc bien $\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1} = k) = (N+n-1)P(B_n).$

b) Avant le $(n+1)$ ème tirage il y a $N+n$ boules au total dans l'urne.

De plus, sachant que $[X_{n-1} = k] \cap B_n$ est réalisé, avant le $(n+1)$ ème tirage il y a $k+1$ boules blanches (il y en avait k à l'issue du $(n-1)$ ème tirage et le n ème tirage nous en a rajouté une).

$$\text{Donc } P_{[X_{n-1}=k] \cap B_n}(B_{n+1}) = \frac{k+1}{N+n}$$

$$\text{De même, } P_{[X_{n-1}=k] \cap \overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{k}{N+n}.$$

c) La famille d'événements $([X_{n-1} = k] \cap B_n, [X_{n-1} = k] \cap \overline{B_n})_{k \in \llbracket N_1; N_1+n-1 \rrbracket}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales on a donc :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \left(P([X_{n-1} = k] \cap B_n) P_{[X_{n-1}=k] \cap B_n}(B_{n+1}) + P([X_{n-1} = k] \cap \overline{B_n}) P_{[X_{n-1}=k] \cap \overline{B_n}}(B_{n+1}) \right) \\ &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \left(P([X_{n-1} = k] \cap B_n) \frac{k+1}{N+n} + P([X_{n-1} = k] \cap \overline{B_n}) \frac{k}{N+n} \right) \\ &= \frac{1}{N+n} \left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \left(P([X_{n-1} = k] \cap B_n) + \underbrace{k(P([X_{n-1} = k] \cap B_n) + P([X_{n-1} = k] \cap \overline{B_n}))}_{P(X_{n-1}=k)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{N+n} \left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} (P([X_{n-1} = k] \cap B_n) + kP(X_{n-1} = k)) \right) \\ &= \frac{1}{N+n} \left(\underbrace{\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P([X_{n-1} = k] \cap B_n)}_{\text{formule des probas totales}} + \underbrace{\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1} = k)}_{\text{question 2.a)} \right) \\ &= \frac{1}{N+n} (P(B_n) + (N+n-1)P(B_n)) \\ &= P(B_n). \end{aligned}$$

10. D'après les questions 8. et 9.c), $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P(B_n) = \frac{N_1}{N}}$ et d'après la question 9.a),

$$\boxed{E(X_n) = (N+n)P(B_{n+1}) = \frac{N_1(N+n)}{N}.$$

Problème 2 : G2E

Partie A : Ensemble de définition d'une fonction définie par une intégrale

1. a) Pour tout réel x , $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^{x+1} = 0}$ d'après la règle des croissances comparées.

Par définition d'une limite, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \text{ tel que } t \geq A \implies |e^{-t} t^{x+1} - 0| \leq \varepsilon.$$

On choisit d'appliquer cette définition pour $\varepsilon = 1$, ce qui nous donne l'existence d'un réel $T \geq 1$ (*dans la définition on a $\varepsilon > 0$ mais on peut faire le choix d'imposer de prendre un réel ≥ 1*) tel que :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \quad t \geq T \implies e^{-t} \underbrace{t^{x+1}}_{=t^2 \times t^{x-1}} \leq 1 \implies \boxed{e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}} \quad \text{car } t^2 > 0.$$

b) Quel que soit le réel x , la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $[1; +\infty[$. Donc $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est impropre uniquement en $+\infty$.

On a vu que, pour tout $t \geq T$, $0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}$.

Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente :

$$\forall \alpha \geq 1, \quad \int_1^\alpha \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{\alpha} + 1.$$

Or, $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 \in \mathbb{R}$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.

Par critère de majoration pour les intégrales de fonctions positives, on peut en déduire que

pour tout réel x , $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

2. a) Si $x \geq 1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur $[0; 1]$ donc $\int_0^1 t^{x-1} dt$ est convergente.

Si $x < 1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0; 1]$. Le problème de convergence se pose donc en 0.

Soit $A \in]0; 1]$. Si $x \neq 0$, $\int_A^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x \right]_A^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} A^x$.

Or, si $x > 0$, $\lim_{A \rightarrow 0} A^x = 0$ et si $x < 0$, $\lim_{A \rightarrow 0^+} A^x = +\infty$.

Donc si $x > 0$, $\int_0^1 t^{x-1} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{x}$, et si $x < 0$, $\int_0^1 t^{x-1} dt$ est divergente.

Pour le cas $x = 0$, on a $\int_A^1 \frac{1}{t} dt = -\ln(A)$ et $\lim_{A \rightarrow 0^+} -\ln(A) = +\infty$, donc $\int_0^1 t^{-1} dt$ est divergente.

En conclusion, $\int_0^1 t^{x-1} dt$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$ et pour $x > 0$, $\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$.

b) Méthode 1 : par équivalence

On sait que $e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1$ donc $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$.

Par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on sait donc que $\int_0^1 t^{x-1} dt$ et $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ sont de même nature.

Or on vient de montrer que $\int_0^1 t^{x-1} dt$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

Donc $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

Méthode 2 : par inégalités

Pour tout $t \in]0; 1]$, $e^{-1} \leq e^{-t} \leq 1$, donc :

$$\forall t \in]0; 1], \quad 0 \leq e^{-1} t^{x-1} \leq e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}.$$

Si $x > 0$, $\int_0^1 t^{x-1} dt$ est convergente donc par critère de majoration pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

Si $x \leq 0$, $\int_0^1 t^{x-1} dt$ est divergente donc $\int_0^1 e^{-1} t^{x-1} dt$ est divergente et donc, par critère de minoration pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ est divergente.

En conclusion, $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

3. D'après les questions 1. et 2. $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

Donc le domaine de définition de Γ est $\mathbb{R}^{+*}$.

Partie B : Quelques propriétés de cette fonction

4. a) Soit $x > 0$ fixé.

La fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

De plus, pour tout $t \in]0; +\infty[$, $e^{-t} t^{x-1} \geq 0$ et la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ n'est pas la fonction nulle sur $]0; +\infty[$.

Donc, par propriété de stricte positivité de l'intégrale, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \Gamma(x) > 0$.

b) Soit $x > 0$ fixé. $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$. On pose, pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} u(t) &= t^x & u'(t) &= xt^{x-1} \\ v'(t) &= e^{-t} & v(t) &= -e^{-t} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\lim_{t \rightarrow 0} u(t)v(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ (croissances comparées).

Par théorème d'intégration par parties généralisé, comme $\Gamma(x+1)$ est convergente, on a $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ qui est convergente et

$$\Gamma(x+1) = 0 - 0 + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

On a bien, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}.$

c) $\boxed{\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.}$ (Intégrale de référence)

Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\Gamma(n) = (n-1)!$ » est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, d'une part $(n-1)! = 0! = 1$ et d'autre part $\Gamma(1) = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

D'après la question précédente, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!}.$

5. a) On a montré que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ et on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$ car Γ est continue en 1.

Donc par produit de limites, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty}.$

Par caractérisation séquentielle de la limite, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty, n \in \mathbb{N}} \Gamma(n).$

Or $\Gamma(n) = (n-1)!$. Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty}.$

b) Par caractérisation séquentielle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n)}{n}.$

Or $\frac{\Gamma(n)}{n} = \frac{(n-1)!}{n} = \frac{n!}{n^2}$. Donc, d'après la règles des croissances comparées, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty}.$

6. a) D'après notre cours, $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.}$

Comme la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

On a donc $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.}$

b) Par définition, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$

On pose alors $u = \sqrt{2t}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{2t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. On a de plus $du = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}} dt$ et u varie de 0 à $+\infty$.

Grâce au théorème de changement de variable généralisé, comme on sait que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est convergente, on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{2} du = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

On a donc $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.}$

c) On remarque que :

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\
 &\vdots \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \times \dots \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{2n-1}{2} \times \frac{2n-3}{2} \times \dots \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2^n} \times \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots \times 3 \times 2 \times 1}{2n(2n-2)\dots \times 4 \times 2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}}.
 \end{aligned}$$

Cette démonstration avec les pointillés n'est pas très rigoureuse mais vu la longueur de l'épreuve il est possible qu'aux concours ce calcul soit suffisant. Voici la démonstration rigoureuse par récurrence :

Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}$ » est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, $\frac{0!}{2^0 0!} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

D'après la question 4.b),

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{2n+1}{2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!} \sqrt{\pi} \\
 &= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)2^{2n+1}n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!} \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = \boxed{\frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}}.$

Bonus : Des calculs

7. La fonction $f_{a,\lambda}$ est continue sur $]0; +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

On considère le changement de variable $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant sur $]0; +\infty[$: $t = \lambda x$. On a alors $dt = \lambda dx$ et t varie de 0 à $+\infty$.

D'après le théorème de changement de variable généralisé, sous réserve de convergence, on a :

$$\int_0^{+\infty} f_{a,\lambda}(x) dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{a-1} \lambda dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = 1.$$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} f_{a,\lambda}(x) dx \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} f_{a,\lambda}(x) dx = 1.}$

8. On reprend le même changement de variable que dans la question précédente. Sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^a dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^a \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \Gamma(a)} \Gamma(a+1) = \frac{a}{\lambda}.$$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x) dx \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} x f_{a,\lambda}(x) dx = \frac{a}{\lambda}.}$

9. Pour $x < 0$, on a bien $F'_{a,\lambda}(x) = f_{a,\lambda}(x)$.

Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
 F'_{a,\lambda}(x) &= - \sum_{k=0}^{a-1} \frac{1}{k!} (-\lambda x + k) \lambda (\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x} \\
 &= -\lambda e^{-\lambda x} \left(- \sum_{k=0}^{a-1} \frac{1}{k!} (\lambda x)^k + \sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{(k-1)!} (\lambda x)^{k-1} \right) \\
 &= -\lambda e^{-\lambda x} \left(- \sum_{k=0}^{a-1} \frac{1}{k!} (\lambda x)^k + \sum_{k=0}^{a-2} \frac{1}{k!} (\lambda x)^k \right) \\
 &= \lambda e^{-\lambda x} \times \frac{(\lambda x)^{a-1}}{(a-1)!} \\
 &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} = f_{a,\lambda}(x)
 \end{aligned}$$

$F_{a,\lambda}$ est bien une primitive de $f_{a,\lambda}$ sur $\mathbb{R}^*$.