

## Partie 1

1.1. Soit  $p : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$  une permutation et  $M$  sa matrice.

$M$  est bien une matrice à  $n$  lignes et  $n$  colonnes et ses coefficients sont bien tous positifs car ce sont uniquement des 0 et des 1.

Comme  $p$  est une bijection, pour un entier  $i$  fixé, il existe un unique  $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $j_0 = p(i)$ .

Donc  $M_{ij} = 0$  si  $j \neq j_0$  et  $M_{ij_0} = 1$ . Ainsi,  $\sum_{j=1}^n M_{ij} = 1$ .

De même, pour un  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$  fixé, il existe un unique  $i_0$  tel que  $j = p(i_0)$ . Donc  $M_{ij} = 0$  si  $i \neq i_0$  et  $M_{i_0j} = 1$ .

Ainsi,  $\sum_{i=1}^n M_{ij} = 1$ .

$M$  est bien une matrice bistochastique.

1.2.

$$\begin{aligned} b_1 \sum_{j=1}^n c_j + \sum_{i=2}^n \left[ (b_i - b_{i-1}) \sum_{j=i}^n c_j \right] &= b_1 \sum_{j=1}^n c_j + \sum_{i=2}^n b_i \sum_{j=i}^n c_j - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \sum_{j=i+1}^n c_j \\ &= b_1 \sum_{j=1}^n c_j + \sum_{i=2}^{n-1} b_i \sum_{j=i}^n c_j + b_n c_n - b_1 \sum_{j=2}^n c_j - \sum_{i=2}^{n-1} b_i \sum_{j=i+1}^n c_j \\ &= b_1 \left( \sum_{j=1}^n c_j - \sum_{j=2}^n c_j \right) + \sum_{i=2}^{n-1} b_i \left( \sum_{j=i}^n c_j - \sum_{j=i+1}^n c_j \right) + b_n c_n \\ &= b_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n-1} b_i c_i + b_n c_n = \sum_{i=1}^n b_i c_i. \end{aligned}$$

1.3. Exemple

$$\begin{aligned} 1.3.1. \quad p_1 : \begin{cases} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{cases}, M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. & p_4 : \begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \end{cases}, M_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ p_2 : \begin{cases} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \end{cases}, M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. & p_5 : \begin{cases} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases}, M_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ p_3 : \begin{cases} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases}, M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. & p_6 : \begin{cases} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 2 \end{cases}, M_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.3.2. \quad &\bullet \text{ Pour } p_1 : \sum_{i=1}^3 (y_{p(i)} - x_i)^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4. \\ &\bullet \text{ Pour } p_2 : \sum_{i=1}^3 (y_{p(i)} - x_i)^2 = 0^2 + 3^2 + 1^2 = 10. \\ &\bullet \text{ Pour } p_3 : \sum_{i=1}^3 (y_{p(i)} - x_i)^2 = 1^2 + 3^2 + (-2)^2 = 14. \\ &\bullet \text{ Pour } p_4 : \sum_{i=1}^3 (y_{p(i)} - x_i)^2 = 1^2 + (-1)^2 + 2^2 = 6. \\ &\bullet \text{ Pour } p_5 : \sum_{i=1}^3 (y_{p(i)} - x_i)^2 = 4^2 + 0^2 + (-2)^2 = 20. \end{aligned}$$

- Pour  $p_6 : \sum_{i=1}^3 (y_{p(i)} - x_i)^2 = 4^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 18$ .

Dans ce cas, c'est  $p_1 = \text{id}$  qui minimise cette quantité.

#### 1.4. Exemple

- 1.4.1. On remarque rapidement que la matrice  $M$  donnée est bien bistochastique : comme  $r \in [0; 1]$ , on a bien  $r$  et  $1 - r$  qui sont positifs et de plus, la somme sur chaque ligne ou colonne est  $r + 1 - r = 1$ .

On a alors  $C(M) = 1^2 \times (1 - r) + 4^2 \times r + 0^2 \times r + 3^2 \times (1 - r) = 6r + 10$ .

- 1.4.2. Montrons que les matrice bistochastique de taille  $(2, 2)$  sont de la forme des matrices de la question précédente.

Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  une matrice bistochastique. Écrivons  $M$  sous la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On sait alors que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont positifs. De plus :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ c + d = 1 \\ a + c = 1 \\ b + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ d = 1 - c \\ 1 - b + c = 1 \\ b + 1 - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ d = 1 - c \\ c = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ d = 1 - b \\ c = b \end{cases}$$

Comme  $a \geq 0$ , on en déduit que nécessairement,  $b \in [0; 1]$ .

On a donc  $M = \begin{pmatrix} 1 - b & b \\ b & 1 - b \end{pmatrix}$  avec  $b \in [0; 1]$ .

Les matrice bistochastique de taille 2 sont donc bien forcément de la forme de la matrice de la question précédente.

Pour  $r$  variant dans  $[0; 1]$ ,  $C(M) = 6r + 10$  est donc minimal uniquement pour  $r = 0$  ce qui correspond à  $M = I_2$ .

#### 1.5. Matrice de permutation

- 1.5.1. Une permutation est une bijection de  $\llbracket 1; n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , donc quitte à réordonner  $\{p(j), j \in \llbracket 1; n \rrbracket\} = \llbracket 1; n \rrbracket$ .

Ainsi  $\sum_{j=1}^n y_{p(j)} = \sum_{j=1}^n y_j$ .

Pour l'inégalité demandée, fixons nous  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On ordonne alors l'ensemble  $\{p(j), j \in \llbracket i; n \rrbracket\}$  en l'écrivant sous la forme :

$$\{p(j), j \in \llbracket i; n \rrbracket\} = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_n\}, \quad \text{avec } a_i < a_{i+1} < \dots < a_n.$$

Les  $a_j$  sont distincts deux à deux et appartiennent tous à  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . On a donc nécessairement

$$a_i \leq i, \quad a_{i+1} \leq i + 1, \dots, a_n \leq n.$$

Comme les  $y_k$  sont rangés par ordre croissant,  $y_{a_k} \leq y_k$  et donc

$$\sum_{j=i}^n y_{p(j)} = \sum_{j=i}^n y_{a_j} \leq \sum_{j=i}^n y_j.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (y_{p(i)} - x_i)^2 &= \sum_{i=1}^n y_{p(i)}^2 - 2 \sum_{i=1}^n y_{p(i)} x_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n y_{p(i)} x_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \left( x_1 \sum_{j=1}^n y_{p(j)} + \sum_{i=2}^n \left( (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^n y_{p(j)} \right) \right) + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2x_1 \sum_{j=1}^n y_j - 2 \sum_{i=2}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0} \underbrace{\sum_{j=i}^n y_{p(j)}}_{\leq \sum_{j=i}^n y_j} + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
&\geq \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \left( x_1 \sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=2}^n \left( (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^n y_j \right) \right)}_{= \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} + \sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

1.5.2. Pour une matrice de permutation,  $M_{ij} = 0$  si  $p(i) \neq j$  et  $M_{ip(i)} = 1$ .

Donc  $C(M) = \sum_{i=1}^n (y_{p(i)} - x_i)^2$ .

On remarque aussi que  $C(I_n) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2$ . Ainsi, d'après la question précédente, pour toute matrice  $M$  de permutation,  $C(M) \geq C(I_n)$ .

La matrice identité rend bien minimale la quantité  $C(M)$ .

## 1.6. Matrices bistochastiques symétriques

1.6.1. Pour tout  $i, j$  de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , comme les  $x_k$  et les  $y_k$  sont rangés par ordre croissant, les deux quantités  $x_i - x_j$  et  $y_i - y_j$  sont de même signe.

Donc  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$ , ce qui donne en développant :

$$x_i x_j - x_i y_j - x_j y_i + y_i y_j \geq 0 \Leftrightarrow x_i x_j + y_i y_j \geq x_i y_j + x_j y_i.$$

1.6.2. Soit  $M$  une matrice bistochastique symétrique. On a alors :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_j - x_i)^2 M_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j^2 M_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 M_{ij}.$$

On remarque alors que  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j^2 M_{ij} = \sum_{j=1}^n y_j^2 \sum_{i=1}^n M_{ij} = \sum_{j=1}^n y_j^2$  car  $M$  est bistochastique.

De même,  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 M_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

De plus,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n y_i x_j M_{ji} \end{aligned}$$

dans la deuxième somme on a échangé les noms des indices de sommation...

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i x_j M_{ji}$$

dans la deuxième double somme on échange l'ordre des deux sommes

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_j x_i M_{ij} + y_i x_j \underbrace{M_{ji}}_{=M_{ij}}) \text{ car matrice symétrique} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_j x_i + y_i x_j) M_{ij} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_i + x_j y_j) M_{ij} \text{ question précédente} \end{aligned}$$

On remarque alors que  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i M_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n M_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

De même  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_j M_{ij} = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ .

Donc  $2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} \leq 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

Pour finir, on a donc

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_j - x_i)^2 M_{ij} \geq \underbrace{\sum_{j=1}^n y_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2}_{= \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}.$$

1.6.3. D'après la question précédente, en remarquant que  $C(I_n) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2$ , on a

$$C(M) \geq C(I_n),$$

pour toute matrice  $M$  bistochastique symétrique. Donc la matrice identité rend bien minimale la quantité  $C(M)$  parmi les matrices bistochastiques symétriques ( $I_n$  fait bien partie de cette catégorie).

## 1.7. Cas général

1.7.1. Traitons tout d'abord le cas  $i = 1$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} y_k &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n M_{jk} \right) y_k \\ &= \sum_{k=1}^n y_k \quad \text{car } M \text{ est bistochastique} \\ &= \sum_{j=1}^n y_j \end{aligned}$$

L'inégalité est donc en fait une égalité.

On suppose maintenant que  $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ .

Comme les  $y_k$  sont rangés par ordre croissant, si  $k \leq i - 1$  alors  $y_k \leq y_i$ .

Donc, comme les  $M_{kj}$  sont des réels positifs, pour tout  $j \geq i$ ,  $\sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k \leq \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_i$ .

On en déduit donc que  $\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k \leq \left( \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} \right) y_i$ .

On va maintenant montrer que  $\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} &= \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} - \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} M_{kj} \end{aligned}$$

on a regroupé les deux premiers termes et dans la troisième double somme on a renommé les indices en échangeant leur nom

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{\sum_{j=1}^n M_{jk}}_{=1 = \sum_{j=1}^n M_{kj}} - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} \\ &= \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj}. \end{aligned}$$

On a donc montré que  $\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k \leq \left( \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} \right) y_i$ .

Or, toujours parce que les  $y_k$  sont rangés par ordre croissant,  $\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j \geq \left( \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} \right) y_i$ .

On a donc bien montré ce qui nous est indiqué, c'est-à-dire que :

$$\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k \leq \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} y_k &= \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=i}^n M_{jk} y_k \\ &\leq \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j + \sum_{j=i}^n \sum_{k=i}^n M_{jk} y_k \end{aligned}$$

d'après l'inégalité qu'on a montré juste avant

Dans la deuxième somme, on remarque alors, qu'en renommant les indices ( $p = j$  et  $\ell = k$ ) puis en échangeant l'ordre des sommes, on a :

$$\sum_{j=i}^n \sum_{k=i}^n M_{jk} y_k = \sum_{p=i}^n \sum_{\ell=i}^n M_{p\ell} y_\ell = \sum_{\ell=i}^n \sum_{p=i}^n M_{p\ell} y_\ell$$

De plus on peut aussi dans la première somme renommer les indices  $p = k$  et  $\ell = j$  et cette somme devient

$$\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j = \sum_{\ell=i}^n \sum_{p=1}^{i-1} M_{p\ell} y_\ell.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j + \sum_{j=i}^n \sum_{k=i}^n M_{jk} y_k &= \sum_{\ell=i}^n \sum_{p=1}^{i-1} M_{p\ell} y_\ell + \sum_{\ell=i}^n \sum_{p=i}^n M_{p\ell} y_\ell \\ &= \sum_{\ell=i}^n \underbrace{\left( \sum_{p=1}^n M_{p\ell} \right)}_{=1} y_\ell \\ &= \sum_{\ell=i}^n y_\ell = \sum_{j=i}^n y_j \end{aligned}$$

On a bien obtenu le résultat demandé :

$$\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} y_k \leq \sum_{j=i}^n y_j \quad (*)$$

Pour la dernière inégalité reprenons les calculs du cas symétrique. On peut repartir de :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_j - x_i)^2 M_{ij} = \sum_{j=1}^n y_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} + \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

On cherche donc à montrer que  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} \leq \sum_{j=1}^n y_j x_j$ .

On va se servir de la question 1.2 en écrivant :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n y_j M_{ij} \right)}_{c_i} \underbrace{x_i}_{b_i}.$$

Afin de « libérer » la lettre  $j$ , on peut remarquer que  $c_i = \sum_{k=1}^n M_{ik} y_k$ .

Grâce à la question 1.2.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} = x_1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} y_k + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} y_k$$

On a déjà vu que  $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} y_k = \sum_{j=1}^n y_j$ .

De plus, d'après (\*) :

$$\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} y_k \leq \sum_{j=i}^n y_j$$

Comme  $x_i - x_{i-1} \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i M_{ij} &= x_1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} y_k + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} y_k \\ &\leq x_1 \sum_{j=1}^n y_j + \underbrace{\sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=i}^n y_j}_{=\sum_{i=1}^n x_i y_i} \end{aligned}$$

toujours d'après 1.2.

On a donc obtenu que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_j - x_i)^2 M_{ij} \geq \sum_{j=1}^n y_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2.$$

1.7.2. On a montré dans la question précédente que pour toute matrice bistochastique  $M$ ,

$$C(M) \geq C(I_n).$$

Donc la matrice identité rend bien minimale la quantité  $C(M)$  parmi les matrice bistochastique. ( $I_n$  fait bien partie de cette catégorie).

1.7.3. On suppose donc dans cette question que les  $x_i$  et  $y_i$  sont rangés dans un ordre strictement croissant et on veut montrer que dans l'inégalité  $C(M) \geq C(I_n)$  on a égalité si, et seulement si,  $M = I_n$ .

L'idée ici est de remonter les calculs de la question 1.7.1 pour voir ce que signifie le cas d'égalité.

Comme dans cette question on a  $x_i - x_{i-1} > 0$  (et non plus  $\geq$ ) on ne peut avoir égalité dans l'inégalité finale de la question 1.7.1 que si l'inégalité (\*) est une égalité.

Or, lors de la démonstration de l'inégalité (\*), la seule inégalité utilisée est  $\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k \leq \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j$ .

On ne peut donc avoir égalité dans (\*) que si cette inégalité est une égalité.

$$\text{Notons } \Delta_i = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k - \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j.$$

On souhaite donc savoir à quelle condition sur  $M$ ,  $\Delta_i = 0$  pour tout  $i \geq 2$ . On peut, pour faciliter les calculs, poser  $\Delta_1 = 0$ .

*Idee : simplifier au maximum la différence  $\Delta_{i+1} - \Delta_i$  et regarder quand cette différence est nulle.*

Pour  $i \geq 2$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^i M_{jk} y_k &= \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k + \sum_{j=i+1}^n M_{ji} y_i \\ &= \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{jk} y_k - \sum_{k=1}^{i-1} M_{ik} y_k + \sum_{j=i+1}^n M_{ji} y_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^i M_{kj} y_j &= \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j - \sum_{k=1}^{i-1} M_{ki} y_i + \sum_{j=i+1}^n M_{ij} y_j \\ &= \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^{i-1} M_{kj} y_j - \sum_{j=1}^{i-1} M_{ji} y_i + \sum_{k=i+1}^n M_{ik} y_k \end{aligned}$$

dans les deux dernières sommes on change le nom des indices

On soustrait et on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta_{i+1} &= \Delta_i - \sum_{k=1}^n M_{ik}y_k + M_{ii}y_i + \underbrace{\sum_{j=1}^n M_{ji}y_j}_{=y_i} - M_{ii}y_i \\ &= \Delta_i - \sum_{k=1}^n M_{ik}y_k + y_i\end{aligned}$$

On peut remarquer que cette égalité est encore vraie pour  $i = 1$  car :

$$\Delta_2 = \sum_{j=2}^n M_{j1}y_1 - \sum_{j=2}^n M_{1j}y_j = y_1 - M_{11}y_1 - \sum_{j=2}^n M_{1j}y_j = y_1 - \sum_{j=1}^n M_{1j}y_j.$$

Ainsi, avec le fait que  $\Delta_1 = 0$ , on peut en déduire que  $\Delta_i = 0$  pour tout  $i$  si, et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad y_i - \sum_{k=1}^n M_{ik}y_k = 0. \quad (**)$$

Pour  $i = n$ , en écrivant  $y_n = y_n \sum_{k=1}^n M_{nk}$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n M_{nk}(y_n - y_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} M_{nk}(y_n - y_k) = 0$$

Or, pour  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $y_n - y_k > 0$  et  $M_{nk} \geq 0$ .

On a donc une somme de termes positifs qui est nulle, donc chaque terme est nul.

Ainsi, pour  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $M_{kn} = 0$ .

Grâce à la propriété des matrices bistochastiques (somme sur une colonne vaut 1) on en déduit que  $M_{nn} = 1$  et donc (somme sur une ligne vaut 1 et coeff tous positifs)  $M_{nk} = 0$ , pour tout  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ .

Grâce à cette information, l'égalité (\*\*) devient :

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad y_i - \sum_{k=1}^{n-1} M_{ik}y_k = 0.$$

On réitère notre raisonnement avec  $i = n-1$ . On obtient que  $M_{n-1,n-1} = 1$  et tous les autres termes de la ligne  $n-1$  et de la colonne  $n-1$  sont nuls.

On effectue alors une récurrence descendante et on obtient bien que  $M = I_n$ .

On a montré que seule la matrice identité réalise l'égalité  $C(M) = C(I_n)$  parmi les matrices bistochastiques.

## Partie 2

Dans toute cette partie nous noterons  $h$  une densité de la variable  $U$  qui suit une loi uniforme sur  $[0; 1]$ .

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 2.1. Exemple

2.1.1. La fonction  $g$  étant continue sur le segment  $[0; 1]$ , elle est bornée. Donc la variable  $g(U)$  prend ses valeurs dans un intervalle borné et donc elle admet une variance. D'après le théorème de Kœnig-Huygens on a :

$$V(g(U)) = E[(g(U) - E[g(U)])^2] = E[g(U)^2] - (E[g(U)])^2.$$

Or  $V(g(U)) \geq 0$  donc  $E[g(U)^2] \geq (E[g(U)])^2$ .



Cas d'égalité :

$$\begin{aligned}
 E[g(U)^2] &= (E[g(U)])^2 \Leftrightarrow E[(g(U) - E[g(U)])^2] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (g(U) - E[g(U)])^2 = 0 \\
 &\text{car pour une VAR à valeurs } \mathbf{positives} \ E(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \\
 &\Leftrightarrow g(U) = E[g(U)] \\
 &\Leftrightarrow g(U) \text{ est constante} \Leftrightarrow g \text{ est constante}
 \end{aligned}$$

2.1.2. Tout d'abord on a  $E[(S_0(U) - U)^2] = E[(U + 1 - U)^2] = E(1) = 1$ .

De plus, pour tout  $S \in \mathcal{S}$ , d'après la question 2.1.1. (on prend  $g = S - \text{id}$ ) :

$$E[(S(U) - U)^2] \geq (E[S(U) - U])^2.$$

De plus  $E[S(U) - U] = E[S(U)] - E[U] = E[S(U)] - \frac{1}{2}$ , et d'après les propriétés de l'ensemble  $\mathcal{S}$ ,  $S(U)$  admet  $f$  pour densité donc :

$$E[S(U)] = \int_1^2 t f(t) dt = \int_1^2 t \times 1 dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Donc  $E[S(U) - U] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$  et ainsi  $E[(S(U) - U)^2] \geq 1$ .

On a donc bien  $S_0$  qui minimise la quantité  $E[(S(U) - U)^2]$ .

De plus  $E[(S(U) - U)^2] = 1$  si et seulement si  $E[(S(U) - U)^2] = (E[S(U) - U])^2$  et d'après la question précédente, cela n'est possible que si la fonction  $S - \text{id}$  est constante.

Or on a vu que pour  $S \in \mathcal{S}$ ,  $E[S(U) - U] = 1$  donc si  $S - \text{id} = \text{cste}$  alors nécessairement cette constante vaut 1.

Ainsi la seule fonction  $S$  rendant minimale la quantité étudiée est la fonction  $\text{id} + 1$  c'est à dire  $S_0$ .

2.2. Remarquons tout d'abord ceci : on suppose que  $f$  est une densité de probabilité et on suppose que  $\int_1^2 f(t) dt = 1$ , on a donc nécessairement  $f$  qui est nulle en dehors de l'intervalle  $[1; 2]$ .

Pour tout  $x \in [1; 2]$ , par définition d'une variable à densité,  $F_V(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_1^x f(t) dt$ . La fonction  $f$  étant supposée continue sur  $[1; 2]$ , on peut affirmer (théorème fondamental de l'analyse) que  $F_V$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1; 2]$  et  $F'_V = f$ . Comme  $f$  est supposée strictement positive sur  $[1; 2]$ , on en déduit que  $F_V$  est strictement croissante sur  $[1; 2]$ .

La restriction de  $F_V$  à  $[1; 2]$  est donc une fonction continue (et même  $\mathcal{C}^1$ ) et strictement croissante. D'après le théorème de bijection monotone, la restriction de  $F_V$  à  $[1; 2]$  réalise donc une bijection de  $[1; 2]$  sur  $[F_V(1); F_V(2)] = [0; 1]$ .

Montrons maintenant que la variable aléatoire  $F_V^{-1}(U)$  admet  $f$  pour densité.

Notons  $G$  la fonction de répartition de  $F_V^{-1}(U)$ . Par définition,  $G(x) = P(F_V^{-1}(U) \leq x)$ .

Comme  $F_V^{-1}$  est à valeurs dans  $[1; 2]$ , on a pour  $x < 1$ ,  $G(x) = 0$  et pour  $x > 2$ ,  $G(x) = 1$ .

Et pour  $x \in [1; 2]$ ,  $G(x) = P(U \leq F_V(x)) = F_V(x)$  car  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0; 1]$ .

On a donc  $G = F_V$  et donc  $F_V^{-1}(U)$  suit la même loi de  $V$ , c'est-à-dire admet  $f$  pour densité.

Ainsi  $F_V^{-1} \in \mathcal{S}$ .

Considérons maintenant  $S$  une fonction de  $\mathcal{S}$  qui soit strictement croissante.

$S$  réalise donc une bijection de  $[0; 1]$  sur  $[S(0); S(1)] = J$ .

Montrons que  $J = [1; 2]$  et que  $S = F_V^{-1}$ .

Comme  $S(U)$  admet  $f$  pour densité, on a  $P(S(U) \leq 1) = 0$  et  $P(S(U) \geq 2) = 0$ . On peut donc affirmer que  $S([0; 1]) \subset [1; 2]$ .

De plus, pour tout  $v \in [1; 2]$ ,  $P(S(U) \leq v) > 0$ , donc  $[S(U) \leq v] \neq \emptyset$  et donc il existe  $\alpha \in [1; v]$  tel que  $\alpha \in S([0; 1])$ .  $S([0; 1])$  contient des nombres aussi proches de 1 que l'on veut.

De manière symétrique  $S([0; 1])$  contient des nombres aussi proches de 2 que l'on souhaite.

Donc  $]1; 2[ \subset S([0; 1])$ . Et comme  $S([0; 1])$  est un intervalle fermé et borné car  $S$  est continue, on a bien montré que  $J = S([0; 1]) = [1; 2]$ .

Soit maintenant  $x \in [1; 2]$ . Comme  $S(U)$  a pour densité  $f$ , on sait que

$$P(S(U) \leq x) = F_V(x).$$

De plus, comme  $S$  est bijective sur  $[0; 1]$ , on a aussi

$$P(S(U) \leq x) = P(U \leq S^{-1}(x)) = S^{-1}(x).$$

Donc, sur  $[1; 2]$ ,  $F_V = S^{-1}$  c'est-à-dire  $S = F_V^{-1}$  sur  $[0; 1]$ .

$F_V^{-1}$  est l'unique fonction de  $\mathcal{S}$  qui soit strictement croissante sur  $[0; 1]$ .

2.3. Dans cette question  $s(u) = \int_u^1 S(x)dx$ .

2.3.1. On pose, pour tout  $u \in [0; 1]$  :

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= s(u) & \alpha'(u) &= -S(u) \\ \beta'(u) &= 1 & \beta(u) &= u \end{aligned}$$

Les fonction  $\alpha$  et  $\beta$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1]$ , donc par intégration par parties :

$$\int_0^1 s(u)du = [us(u)]_0^1 + \int_0^1 uS(u)du = \int_0^1 uS(u)du,$$

car  $s(1) = 0$ .

2.3.2. Soit  $u \in [0; 1]$  fixé. Supposons que  $x \geq u$ . Alors on a

$$\int_0^2 1_A(x, y)dy = \int_0^{S(x)} 1dy = S(x).$$

Si  $x < u$  alors

$$\int_0^2 1_A(x, y)dy = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ \int_0^2 1_A(x, y)dy \right] dx &= \int_0^u \left[ \int_0^2 1_A(x, y)dy \right] dx + \int_u^1 \left[ \int_0^2 1_A(x, y)dy \right] dx \\ &= \int_0^u 0dx + \int_u^1 S(x)dx = s(u) \end{aligned}$$

On a donc montré que  $s(u) = \int_0^1 \left[ \int_0^2 1_A(x, y)dy \right] dx$ .

On utilise alors le théorème de Fubini admis avec  $g(x, y) = x - u$  et  $h(x, y) = S(x) - y$  qui sont bien des fonctions continues.

On a donc  $s(u) = \int_0^2 \left[ \int_0^1 1_A(x, y)dx \right] dy$ .

2.3.3. Si  $y \in [0; 1[$  alors les événements  $[S(U) \geq y]$  et  $[F_V^{-1}(U) \geq y]$  sont certains donc les deux probabilités données sont égales à  $P(U \geq u)$  et donc l'inégalité demandée est en fait une égalité.

Si  $y \in [1; 2]$ , comme la fonction  $F_V$  est bijective et strictement croissante sur  $[1; 2]$ , on a

$$P[U \geq u, F_V^{-1}(U) \geq y] = P[U \geq u, U \geq F_V(y)] = \begin{cases} 1 - u & \text{si } u \geq F_V(y) \\ 1 - F_V(y) & \text{si } u < F_V(y) \end{cases}.$$

Or on peut remarquer que

$$[U \geq u, S(U) \geq y] \subset [U \geq u] \quad \text{et} \quad [U \geq u, S(U) \geq y] \subset [S(U) \geq y].$$

Donc

$$P[U \geq u, S(U) \geq y] \leq 1 - u \quad \text{et} \quad P[U \geq u, S(U) \geq y] \leq 1 - F_V(y).$$

Ainsi, dans tous les cas,  $P[U \geq u, S(U) \geq y] \leq P[U \geq u, F_V^{-1}(U) \geq y]$ .

2.4. Afin d'exploiter la question précédente il faudrait utiliser une formule hors-programme qui indique comment calculer la probabilité d'une intersection d'événements faisant intervenir des variables à densités à l'aide d'intégrales doubles. Nous allons contourner ce problème.

Pour tout  $S \in \mathcal{S}$  :

$$E[(S(U) - U)^2] = E[S(U)^2] - 2E[US(U)] + E[U^2].$$

Comme  $S(U)$  et  $F_V^{-1}(U)$  ont la même densité  $f$ , elle suivent la même loi et donc  $E[S(U)^2] = E[F_V^{-1}(U)^2]$ . Montrons maintenant que  $E[US(U)] \leq E[UF_V^{-1}(U)]$ .

Par théorème de transfert on a

$$E[US(U)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xS(x)h(x)dx = \int_0^1 xS(x)dx \quad \text{et} \quad E[UF_V^{-1}(U)] = \int_0^1 xF_V^{-1}(x)dx.$$

On rappelle que  $s(u) = \int_u^1 S(x)dx$  et on pose  $s_0(u) = \int_u^1 F_V^{-1}(x)dx$ .

D'après la question 2.3.1 on a donc  $E[US(U)] = \int_0^1 s(u)du$  et  $E[UF_V^{-1}(U)] = \int_0^1 s_0(u)du$ .

Montrons donc que pour tout  $u \in [0; 1]$ ,  $s(u) \leq s_0(u)$ .

Pour cela on utilise la question 2.3.2 :

$$s(u) = \int_0^2 \left[ \int_0^1 1_A(x, y)dx \right] dy$$

$$s_0(u) = \int_0^2 \left[ \int_0^1 1_B(x, y)dx \right] dy,$$

avec  $A = \{(x, y) \in [0; 1] \times [0; 2]; x \geq u \text{ et } S(x) \geq y\}$  et  $B = \{(x, y) \in [0; 1] \times [0; 2]; x \geq u \text{ et } F_V^{-1}(x) \geq y\}$ .

On remarque que  $B = \{(x, y) \in [0; 1] \times [0; 2]; x \geq u \text{ et } x \geq F_V(y)\}$ .

Donc :

- Si  $F_V(y) \geq u$ ,  $\int_0^1 1_B(x, y)dx = 1 - F_V(y)$ ;
- si  $F_V(y) < u$ ,  $\int_0^1 1_B(x, y)dx = 1 - u$ .

On peut alors remarquer que  $A \subset \{(x, y) \in [0; 1] \times [0; 2]; x \geq u\}$  donc

$$\int_0^1 1_A(x, y)dx \leq \int_0^1 1_{\{(x, y) \in [0; 1] \times [0; 2]; x \geq u\}}dx = P(U \geq u) = 1 - u,$$

et de même  $A \subset \{(x, y) \in [0; 1] \times [0; 2]; S(x) \geq y\}$  donc

$$\int_0^1 1_A(x, y)dx \leq \int_0^1 1_{\{(x, y) \in [0; 1] \times [0; 2]; S(x) \geq y\}}dx = P(S(U) \geq y) = 1 - F_V(y).$$

Donc dans tous les cas  $\int_0^1 1_A(x, y)dx \leq \int_0^1 1_B(x, y)dx$ . (on a ici redémontré la question 2.3.3, ce qu'on aurait pu éviter avec le fameux résultat hors-programme dont je parlais avant...)

En intégrant pour  $y \in [0; 2]$ , on obtient  $s(u) \leq s_0(u)$ .

Et ainsi,  $E[US(U)] \leq E[UF_V^{-1}(U)]$  et donc, pour finir  $E[(S(U) - U)^2] \geq E[(F_V^{-1}(U) - U)^2]$ , c'est-à-dire  $F_V^{-1}$  rend minimale la quantité  $E[(S(U) - U)^2]$ .

On retrouve bien le résultat que la question 2.1 car si  $f$  est constante égale à 1 alors  $F_V(x) = x - 1$  sur  $[1; 2]$  et donc  $F_V^{-1}(x) = x + 1 = S_0(x)$ .