

Concepts de base des variables aléatoires

Table des matières

I Généralités sur les variables aléatoires réelles	2
1 Premières définitions et notations	2
2 Fonction de répartition	4
3 Indépendance	6
a 2 variables	6
b n variables	6
II Moments d'une variables aléatoire	7
1 Espérance	7
2 Moments d'ordre r	8
3 Variance et écart-type	8

Dans tout le chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé. Cet espace peut, s'il n'y a pas plus de précision, être fini ou infini.

I Généralités sur les variables aléatoires réelles

1 Premières définitions et notations

Définition 1

On appelle **variable aléatoire réelle (VAR)** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application X définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\}$ est un événement (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{A}$).

Définition 2

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω .

L'ensemble $X(\Omega)$ (qui est un sous ensemble de $\mathbb{R}$) s'appelle **le support de X** .

Remarque :

Au lycée et en première année, vous avez travaillé avec une petite catégorie de VAR, les variables aléatoires réelles finies. Ce sont celles qui vérifient que $X(\Omega)$ est un ensemble fini. Il existe d'autres type de VAR.

Exemples 1 :

- On considère une urne contenant 3 jetons rouges et 2 jetons blanc. On réalise l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à obtenir un jeton rouge. On appelle X_1 la variable aléatoire qui au résultat de notre expérience associe le nombre de tirages effectués.

Dans cette expérience, l'univers Ω est l'ensemble de tous les tirages possible. En schématisant nos tirages par une liste de caractères décrivant la couleur du jeton obtenu on peut modéliser Ω par :

$$\Omega = \{R, BR, BBR\}.$$

Le support de X_1 est alors $X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

- On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce jusqu'à avoir obtenu deux fois (pas forcément consécutivement) pile. On appelle X_2 la variable aléatoire qui au résultat de notre expérience associe le numéro du lancer où on a obtenu le deuxième pile.

Encore une fois ici, l'univers Ω de notre expérience est l'ensemble de toutes les successions pile ou face possibles. On pourrait, comme dans le cas précédent, modéliser les résultats par une suite de caractères représentant le résultat des lancers (par exemple $pf fp$ ou pp ou $fffpfffffp$, ...). Tenter de décrire totalement Ω serait long et totalement inutile pour manipuler correctement la VAR X_2 .

Il est par contre indispensable de savoir donner très rapidement le support de X_2 :

$$X_2(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\} = \{k \in \mathbb{N}, k \geq 2\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

- On se promène dans la rue et on arrête au hasard deux personnes à qui l'on demande de choisir au hasard chacune un réel compris entre -1 et 1 . On appelle X_3 la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres récoltés.

Dans cette expérience, l'univers Ω peut être modélisé par

$$\Omega = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\} = [-1; 1]^2.$$

Le support de X_3 est alors $X_3(\Omega) = [-2; 2]$ car la somme de deux réels pris entre -1 et 1 peut donner n'importe quel réel compris entre -2 et 2 .

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Alors l'ensemble $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\}$ est un événement (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{A}$).

Notations :

- Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in \{a\}\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\} = [X = a]$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in]-\infty; a]\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\} = [X \leq a]$.
On a aussi les notations $[X < a]$, $[X \geq a]$, $[X > a]$, $[a \leq X \leq b]$, ...
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\} = [X \in I]$.

Exemples 2 :

1. Reprenons l'exemple des jetons :

$$[X_1 = 1] = \{R\}, \quad [X_1 = 4] = \emptyset, \quad [X_1 \leq 2] = \{R, BR\}, \quad [X_1 \leq 5] = \Omega,$$

$$[-3, 5 < X_1 < 1, 5] = \{R\} = [X_1 = 1].$$

2. Reprenons l'exemple des pile ou face :

$$[X_2 = 2] = \{pp\}, \quad [X_2 = 4] = \{pffp, fpfp, ffp\}, \quad [X_2 \geq 0] = \Omega.$$

3. Reprenons l'exemple de la somme des deux réels :

$$[X_3 = 3] = \{(x, y) \in [-1; 1]^2 / x + y = 3\},$$

il est impossible de lister l'ensemble de tels couples (x, y) .

Propriété 2

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $g(X)$ l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$g(X)(\omega) = g(X(\omega)).$$

Alors $g(X)$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exemples 3 :

- On considère le jeu suivant. Pour participer le joueur paye 3 euros puis il effectue une série de pile ou face. À chaque face obtenu il doit payer 1 euro supplémentaire et au deuxième pile le jeu s'arrête et le joueur gagne 30 euros. On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur.

Exprimer G à l'aide de la variable aléatoire X_2 de l'exemple 1.

Lorsque X_2 prend la valeur $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, G est alors égal à

$$\underbrace{-3}_{\text{mise de départ}} + \underbrace{-1 \times (k - 2)}_{\text{argent perdu à chaque face}} + \underbrace{30}_{\text{gain final}} = 29 - k.$$

On peut donc dire que $G = 29 - X_2$.

- On reprend l'expérience de la somme de deux réels. On note Y la VAR égale au nombre proposé par la première personne interrogée et Z la VAR égale au nombre proposée par la seconde personne interrogée.

On peut alors écrire $X_3 = Y + Z$.

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit a un réel fixé. Alors on a :

- Pour tout $b \in \mathbb{R}$, $[X \leq a] = [X + b \leq a + b]$.
- Pour tout $b \in \mathbb{R}^*$,

$$\text{Si } b > 0, [X \leq a] = [bX \leq ba] \quad \text{et} \quad \text{si } b < 0, [X \leq a] = [bX \geq ba].$$

- Soit g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$. On suppose aussi que a appartient au domaine de définition de g .

$$\text{Si } g \text{ est strictement croissante, } [X \leq a] = [g(X) \leq g(a)]$$

$$\text{et} \quad \text{si } g \text{ est strictement décroissante, } [X \leq a] = [g(X) \geq g(a)].$$

Remarques :

- On peut remplacer dans cette propriété tout les symboles $\leq$ par $\geq$ ou $=$ ou encore par des encadrement.
- Pour résumer, toutes les opérations qui donnent des inégalités ou égalités équivalentes donnent des événements égaux.

Exemple 4 :

Soit X une variable aléatoire réelle et $a \in \mathbb{R}^+$.

On a par exemple $[e^X = a] = [X = \ln(a)]$, car la fonction $\ln$ est bijective sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On a aussi

$$\begin{aligned} [X^2 - 3 \leq a] &= [X^2 \leq a + 3] && \text{ajouter 3 ne nécessite pas de justification} \\ &= [|X| \leq \sqrt{a + 3}] && \text{car la fonction } \sqrt{\cdot} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &= [-\sqrt{a + 3} \leq X \leq \sqrt{a + 3}] && \text{propriété de la valeur absolue.} \end{aligned}$$

2 Fonction de répartition

X désigne une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 3

On appelle **fonction de répartition de X** l'application $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = P(X \leq t).$$

Remarque :

Pour alléger les notations on écrit $P(X \leq t)$ plutôt que $P([X \leq t])$.

Exemple 5 :

Reprenons la VAR X_1 de l'exemple 1.

On a par exemple $F_{X_1}(0) = P(X_1 \leq 0) = P(\emptyset) = 0$.

On peut généraliser cela car dès que $t < 1$, on a $[X_1 \leq t] = \emptyset$ donc $F_{X_1}(t) = 0$.

On a aussi $F_{X_1}(1, 3) = P(X_1 \leq 1, 3) = P(X_1 = 1) = P(R) = \frac{3}{5}$.

On peut généraliser cela car dès que $1 \leq t < 2$, on a $[X_1 \leq t] = [X_1 = 1]$ donc $F_{X_1}(t) = \frac{3}{5}$.

On a aussi $F_{X_1}(2, 8) = P(X_1 \leq 2, 8) = P([X_1 = 1] \cup [X_1 = 2]) = P(R \cup BR) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{18}{20}$.

On peut généraliser cela car dès que $2 \leq t < 3$, on a $[X_1 \leq t] = [X_1 = 1] \cup [X_1 = 2]$ donc $F_{X_1}(t) = \frac{18}{20}$.

On peut enfin remarquer que si $t \geq 3$, $[X_1 \leq t] = \Omega$, donc $F_{X_1}(t) = 1$.

Exemple 6 :

On considère une VAR X dont la fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 - \frac{1}{4}(x-1)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On considère alors la VAR Y définie par $Y = 3X + 4$.

Déterminons la fonction de répartition de Y .

Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(3X + 4 \leq t) \\ &= P(3X \leq t - 4) \\ &= P\left(X \leq \frac{t-4}{3}\right) && \text{car } \frac{1}{3} > 0 \\ &= F_X\left(\frac{t-4}{3}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{t-4}{3} < -1 \\ 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{t-4}{3} - 1\right)^2 & \text{si } -1 \leq \frac{t-4}{3} \leq 1 \\ 1 & \text{si } \frac{t-4}{3} > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{t-4}{3} - 1\right)^2 & \text{si } 1 \leq t \leq 7 \\ 1 & \text{si } t > 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Propriété 4

Soit F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X . Alors F_X vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) \in [0; 1]$
2. F_X est croissante.
3. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.

Démonstration :

1. Proviens de la définition d'une probabilité.
2. Soit $x \leq y$. Alors on a $[X \leq x] \subset [X \leq y]$ car, pour tout $\omega \in \Omega$, on a l'implication :

$$X(\omega) \leq x \implies X(\omega) \leq y.$$

Par propriété des probabilités, on obtient $P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$, c'est-à-dire $F_X(x) \leq F_X(y)$.

3. Admis en BCPST.

□

a 2 variables

Définition 4

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

On dit que **X et Y sont indépendantes** si, et seulement si, pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$, on a :

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P(X \in I) \times P(Y \in J).$$

Propriété 5

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

X et Y sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y).$$

Remarque :

Cette propriété sera bien plus pratique que la définition pour montrer en exercice que deux VAR sont indépendantes. Nous verrons que pour certaines VAR il existe une autre caractérisation encore plus simple.

b n variables**Définition 5**

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

On dit que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque, pour tous $I_1, I_2, \dots, I_n$ intervalles de $\mathbb{R}$:

$$P([X_1 \in I_1] \cap \dots \cap [X_n \in I_n]) = P(X_1 \in I_1) \times \dots \times P(X_n \in I_n).$$

Propriété 6

Soient $X_1, \dots, X_n$ des VAR mutuellement indépendantes.

- Toute sous-famille de ces n variables aléatoires est aussi une famille de variables mutuellement indépendantes.
- **Lemme des coalitions** : Pour tout $p \in \{1, \dots, n-1\}$, toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \dots, X_n$.
- Si pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f_i est une fonction de $X_i(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ alors les variables $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Remarque :

On peut étendre le lemme des coalitions à un nombre fini de fonctions appliqué à une partition des variables. En particulier le troisième point de la propriété est une conséquence directe du lemme des coalitions.

Exemple 7 :

Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 VAR mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 + 2X_3^2$ et $X_2 - e^{X_5}$ sont indépendantes.

II Moments d'une variables aléatoire

1 Espérance

On admet le théorème suivant :

Théorème 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé quelconque.

Il existe une fonction E définie sur une partie des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :

- $E(1_\Omega) = 1$;
- **Positivité** : si X est une variable aléatoire positive (c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$) telle que $E(X)$ existe alors $E(X) \geq 0$;
- **Linéarité** : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, si X et Y sont des variables aléatoires telles que $E(X)$ et $E(Y)$ existent, alors $E(aX + bY)$ existe et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

On appelle cette fonction la **fonction espérance**.

Remarques :

- Lorsque $E(X)$ existe on dit que **X admet une espérance**.
- Les VAR que vous connaissez pour l'instant, les VAR finies, admettent toujours une espérance. La formule permettant de calculer l'espérance de ce type de VAR est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Exemple 8 :

Reprenons la VAR X_1 de notre premier exemple.

On avait $X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. Donc $E(X) = 1 \times P(X_1 = 1) + 2 \times P(X_1 = 2) + 3 \times P(X_1 = 3)$.

ATTENTION ne pas utiliser un signe Σ lorsqu'on somme un petit nombre de valeurs!!!!

Remarque :

On peut voir que si l'on tente d'étendre cette formule aux VAR X_2 et X_3 on rencontre deux type de problèmes. Pour X_2 on se retrouve avec une « somme infinie », c'est-à-dire une somme de série et vous savez que cet objet n'existe que si la série est convergente.

Pour X_3 , non seulement on retrouve le problème de la somme infinie mais surtout on se retrouve avec une somme avec un « compteur » réel et non entier, et ça, ça n'existe pas en maths!!!

Définition 6

Lorsque X est une variable aléatoire admettant une espérance et telle que $E(X) = 0$, on dit que **X est une variable centrée**.

Propriété 7 : Croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant une espérance et telles que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$. Alors $E(X) \leq E(Y)$.

Démonstration :

On suppose donc que X et Y sont deux variables aléatoires admettant une espérance et telles que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$.

On pose $Z = Y - X$. D'après la propriété de linéarité de l'espérance, Z admet une espérance et

$$E(Z) = E(Y) - E(X).$$

Z est une VAR à valeurs positives (car pour tout $\omega \in \Omega, Z(\omega) = Y(\omega) - X(\omega) \geq 0$) donc par positivité de l'espérance $E(Z) \geq 0$.

On a donc $E(Y) - E(X) \geq 0$, c'est-à-dire $E(X) \leq E(Y)$.

Propriété 8

Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant une espérance et si X et Y sont indépendantes, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

2 Moments d'ordre r **Définition 7**

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dit que **X admet un moment d'ordre r** si, et seulement si, X^r admet une espérance.

Le moment d'ordre r de X est alors noté $m_r(X)$ et $m_r(X) = E(X^r)$.

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

Si X admet un moment d'ordre r alors X admet un moment d'ordre s pour tout $s \in \llbracket 1; r \rrbracket$.

Corollaire 1

Si X^2 admet une espérance alors X admet une espérance.

3 Variance et écart-type

Définition 8

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance et telle que la variable $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2. On appelle **variance de X** le réel :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

De plus lorsque $V(X)$ existe, on appelle **écart-type de X** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques :

- Si X n'admet pas d'espérance, X ne peut pas admettre de variance.
- La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de X et la moyenne de X . Ainsi, la variance est une mesure de dispersion de X par rapport à $E(X)$.

Théorème 2 : Formule de Kœnig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle.

X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance. Et on a alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Remarques :

- En pratique, on utilise très souvent cette formule pour calculer une variance.
- Lorsque X est une VAR finie, on a $E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$.

Propriété 10

Si X est une variable aléatoire réelle admettant une variance alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Définition 9

Si X est une variable aléatoire réelle admettant une variance et telle que $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une **variable centrée réduite**.

Propriété 11

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance non nulle.

La variable aléatoire $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite appelée la **variable aléatoire centrée réduite associé à X** .

Remarque :

La variable centrée réduite associée à X nous sera très utile dans les chapitres sur la convergence de suites de VAR et de statistiques.

Propriété 12

- Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes et admettant une variance **alors** $X + Y$ admet une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

- Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes admettant toutes une variance, **alors** la variable $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$