Correction du devoir maison n° 1

I. Étude des zéros de φ

1. On a, pour tout $x>0$, $\varphi(x)=\dfrac{2x\ln x-2x\ln 2+1}{x}$.

   Or, d'après le cours, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln x-2x\ln 2+1=1$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=+\infty.}$

   $\boxed{\text{La courbe représentative de } \varphi \text{ admet donc une asymptote verticale d'équation } x=0.}$

2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

   De plus, pour tout $x>0$, $\dfrac{\varphi(x)}{x}=\dfrac{2\ln(x)}{x}-\dfrac{2\ln(2)}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(2)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ par croissances comparées, on obtient que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}=0.}$

   $\boxed{\text{Donc la courbe représentative de } \varphi \text{ n'admet pas d'asymptote oblique en } +\infty.}$

   Hors programme : on dit que la courbe représentative de φ admet une branche parabolique de direction l'axe (Ox), ce qui signifie que la courbe a l'allure de la courbe représentative de la fonction racine carrée ou ln.

3. La fonction $x\mapsto\ln\dfrac{x}{2}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc par composée, $x\mapsto\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $x\to\dfrac{1}{x}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   $\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[.}$

   De plus, $\boxed{\text{pour tout } x>0,\ \varphi'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x-1}{x^2}.}$

4. $\varphi'(x)$ est du signe de $2x-1$. On obtient donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$2-4\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. • D'après l'étude faite sur φ, φ est une fonction continue et strictement décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$.

   Donc d'après le théorème de bijection monotone φ réalise une bijection de $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ sur $\varphi(\left]0;\dfrac{1}{2}\right[)=]2-4\ln 2;+\infty[$.

   Or $2-4\ln 2\approx-0,8<0$ donc $0\in]2-4\ln 2;+\infty[$ et ainsi 0 admet un unique antécédent par φ dans l'intervalle $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$.

   L'équation $\varphi(x)=0$ admet donc une unique solution α dans l'intervalle $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$.

   • D'après l'étude faite sur φ, φ est une fonction continue et strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

   Donc d'après le théorème de bijection monotone φ réalise une bijection de $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ sur $\varphi(\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[)=]2-4\ln 2;+\infty[$.

   Or $2-4\ln 2\approx-0,8<0$ donc $0\in]2-4\ln 2;+\infty[$ et ainsi 0 admet un unique antécédent par φ dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

   L'équation $\varphi(x)=0$ admet donc une unique solution β dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

   $\boxed{\text{Ainsi il existe bien deux réels } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } \varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0 \text{ et } 0<\alpha<\tfrac{1}{2}<\beta.}$

6.
```
from math import log

def phi(x):
    return 2*log(x/2)+1/x

a=0
b=1/2
while b-a>0.01:
    c=(a+b)/2
    if phi(c)==0:
        a,b=c,c
    elif phi(c)*phi(b)<0:
        a=c
    else:
        b=c
print('alpha est compris entre',a,' et ',b)
```

II. Points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

1. Les fonctions $(x,y)\to xy$ et $(x,y)\to x+4y$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. De plus les fonctions $t\to\ln(t)$ et $t\to \mathrm{e}^t$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Donc par composition, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur }]0;+\infty[\times]0;+\infty[.}$

2. On a, pour tout $(x,y)\in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy)+\mathrm{e}^{x+4y}\frac{y}{xy}=f(x,y)+\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4\mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy)+\mathrm{e}^{x+4y}\frac{x}{xy}=4f(x,y)+\frac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y}$$

3. • Comme $\varphi(\alpha)=0$, on a :
$$f\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)=\mathrm{e}^{2\alpha}\ln\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)=\mathrm{e}^{2\alpha}\times 2\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\mathrm{e}^{2\alpha}\times\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$
   Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)=\mathrm{e}^{2\alpha}\times\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)+\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha}=0$

   et $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)=4\mathrm{e}^{2\alpha}\times\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)+\dfrac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha}=0$

   $\boxed{\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right) \text{ est un point critique de } f.}$

   • Étant donné que β possède les mêmes propriétés que α on peut aussi affirmer que $\boxed{\left(\beta,\frac{\beta}{4}\right) \text{ est un point critique de } f.}$

4. Calculons les dérivées secondes :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x+4y}+\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=4\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{x+4y}+\frac{4}{y}\mathrm{e}^{x+4y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{4}{x}\mathrm{e}^{x+4y}$$
   On a donc
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)&=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)-\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha}+\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha}\\&=0+\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha}=\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha}\\\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)&=4\frac{\partial f}{\partial y}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)-\frac{16}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha}+\frac{16}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha}\\&=0+16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha}=16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha}\\\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)&=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\alpha,\frac{\alpha}{4}\right)+\frac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha}\\&=0+\frac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha}=\frac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha}\end{aligned}$$