

Exercices : Réduction

Éléments propres

EXERCICE 1 : FAIRE SES GAMMES

Déterminer les valeurs propres (réelle ou complexes) des matrices suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1. A = \begin{pmatrix} -7 & -10 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}. & 4. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}. \\ 2. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}. & 5. A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 8 & 6 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}. \\ 3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. & 6. A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \ (\theta \in \mathbb{R} \text{ fixé}). \\ & 7. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

EXERCICE 2 : POLYNÔME ANNULATEUR

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 + f + \text{id}_E = 0$.

- On suppose dans cette question que f admet une valeur propre λ .
Montrer que $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. *Indication : Utiliser un vecteur propre associé à λ .*
- En déduire que f n'admet pas de valeur propre.

EXERCICE 3 : POLYNÔME ANNULATEUR

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^4 - 2A^3 - A^2 + 3A$.
- Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$.
En déduire que $\text{sp}(A) \subset \{0, -1, 1, 2\}$
- Déterminer les valeurs propres de A .

EXERCICE 4 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = \frac{(1-X)}{n} P' + P.$$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer que f est diagonalisable.
- Pour aller plus loin :** Déterminer une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de f .

EXERCICE 5 : EN DIMENSION INFINIE

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application définie sur E qui à une fonction f de E associe la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- Justifier rapidement que T est un endomorphisme de E .
- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T .

S'entraîner à la diagonalisation

EXERCICE 6 : FAIRE SES GAMMES

Montrer que les deux matrices ci-dessous sont diagonalisables et les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 7 : UN CAS PARTICULIER À RETENIR !

- Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'ont qu'une seule valeur propre et qui sont diagonalisables ?
- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 8 : $\mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$

La matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

EXERCICE 9 : SE LAISSER GUIDER PAR L'ÉNONCÉ

Pour toute matrice M élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note M^T la matrice transposée de M .

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = M + M^T$.

1. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Écrire la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$.
c) L'endomorphisme φ est-il bijectif?
2. Calculer A^2 et en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $A^n = 2^{n-1}A$.
3. a) Montrer que $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(E_1, E_2 + E_3, E_4)$, puis établir que $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 3$.
b) En déduire la dimension de $\ker(\varphi)$ puis déterminer une base de $\ker(\varphi)$.
c) Établir que $\text{Im}(\varphi)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.
d) (i) Sans calculs supplémentaires, justifier que φ est diagonalisable.
(ii) Donner une base de vecteurs propres de φ .

EXERCICE 10 : ORAL G2E

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de

$\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. a) Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
b) Montrer que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable.

On considère dans la suite une base $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f .

2. On suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g = f$.
a) Montrer qu'on a $g \circ f = f \circ g$, puis justifier que g est diagonalisable dans la base $\mathcal{C}$.
b) Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = J$?
3. Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = J$? Si oui, en déterminer une.

Applications de la réduction**EXERCICE 11 : PROBABILITÉ ET RÉDUCTION**

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$;
- il gagne toujours ses deux premières parties.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie ».

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. Démontrer que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.
2. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.
b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.

$$c) \text{ Pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } 2, \text{ on pose : } U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vérifier que } U_{n+1} = MU_n, \text{ où } M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad a) \text{ Soient } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

- b) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de P .
Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4 .
- c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.
4. a) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2, U_n = PD^{n-2}P^{-1}U_2$.
- b) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner **UNIQUEMENT** la première colonne de $PD^{n-2}P^{-1}$, puis en déduire $P(E_n), P(F_n), P(G_n)$ et $P(H_n)$.
- c) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{2}{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}.$$

EXERCICE 12 : TRIGONALISATION

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer la matrice $A(A - 2I)^2$ et en déduire que $\text{sp}(f) \subset \{0; 2\}$.

b) Montrer que 0 et 2 sont bien des valeurs propres de f et déterminer une base de chacun des sous-espaces propres.

c) L'endomorphisme f est-il bijectif? f est-il diagonalisable?
- On considère les vecteurs $u = (2, 1, -2)$ et $v = (3, 1, -2)$

a) Déterminer un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ dont la troisième coordonnée dans la base canonique est égale à 1 et tel que $f(w) = v + 2w$.

b) Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer la matrice de f relative à la base $\mathcal{B}_1$. On note T cette matrice.
- a) On pose $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer N^2 puis montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n .

c) Proposer une matrice P telle que $A = PTP^{-1}$ puis déterminer P^{-1} .

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

e) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

EXERCICE 13 : SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Dans cet exercice on cherche à résoudre le système différentiel suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

d'inconnues x, y et z des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On considère alors la fonction $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par, $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et on admet que, lorsque x, y et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

- Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que le système (S) soit équivalent à l'équation $(E_1) : X'(t) = AX(t)$.
- Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
- Montrer l'équivalence suivante :

X est solution de $(E_1) \iff Y = P^{-1}X$ est solution de $(E_2) : Y'(t) = DY(t)$.

- Résoudre l'équation (E_2) en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$.
- En déduire la résolution du système (S) .

Informatique et réduction

EXERCICE 14 :

Dans la bibliothèque Python `numpy`, la fonction `linalg.eig(M)` renvoie les valeurs propres (réelles et complexes) de M et la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres (dans le même ordre).

Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- À l'aide de Python, conjecturer la valeur des valeurs propres de B ainsi que la dimension de chaque sous-espace propre de B . La matrice B semble-t-elle diagonalisable?
- Prouver rigoureusement vos conjectures.

EXERCICE 15 :

La fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy` permet de connaître le rang d'une matrice comme le montre l'exemple suivant :

```
import numpy as np
A=np.array([[1,2,1],[2,3,2],[3,5,3]])
print(np.linalg.matrix_rank(A))
```

La dernière ligne affiche le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire 2.

Pour cet exercice on s'interdira d'utiliser les fonctions présentes dans Python permettant d'obtenir les valeurs propres ou vecteurs propre d'une matrice données (du type `eigvals` ou `eig`).

1. Écrire une fonction Python `valeur_propre` prenant en argument une matrice A et un réel a et renvoyant un booléen indiquant si a est une valeur propre de A .
2. Écrire une fonction Python `colineaire` prenant en argument deux vecteurs (listes) de taille n et renvoyant un booléen indiquant s'ils sont colinéaires.
3. Écrire une fonction Python `vecteur_propre` prenant en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur (liste) u de taille n et renvoyant un booléen indiquant si u est un vecteur propre de A .

Pour aller plus loin...

EXERCICE 16 : ORAL AGRO-VÉTO 2017

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par la donnée de ses trois premiers termes réels u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}).$$

On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n , on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Écrire une fonction en Python prenant en argument les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et renvoyant la liste de ses 100 premiers termes. Utiliser cette fonction pour étudier le comportement asymptotique de la suite sur quelques exemples.
2. Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de A .

3. Démontrer que, pour tout nombre complexe λ , λ est une valeur propre de A si, et seulement si, λ est solution de l'équation $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.
4. Démontrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, un nombre complexe z de module strictement plus petit que 1, tels que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z} \end{pmatrix} P^{-1}$.
5. Pour tout entier naturel n , exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n , et en déduire une expression de X_n en fonction de n , A et X_0 .
6. Démontrer alors qu'il existe trois nombres complexes a, b et c (que l'on ne demande pas d'explicitier) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + bz^n + c\bar{z}^n.$$

7. Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |bz^n + c\bar{z}^n| = 0$.
Que peut-on dire alors de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(bz^n + c\bar{z}^n)$ et de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(bz^n + c\bar{z}^n)$?
8. En déduire que $a \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

EXERCICE 17 :

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

EXERCICE 18 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

EXERCICE 19 :

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si λ est valeur propre de f , alors λ^k est valeur propre de f^k .
2. Si f est bijectif et si λ est une valeur propre de f , montrer que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de f^{-1} .
3. Montrer que si λ^2 est valeur propre de f^2 , alors λ ou $-\lambda$ est valeur propre de f .

Correction

CORRECTION DE L'EXERCICE 1 :

1. On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{sp}(A) &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -7 - \lambda & -10 \\ 5 & 8 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (-7 - \lambda)(8 - \lambda) + 50 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -2.\end{aligned}$$

Donc $\text{sp}(A) = \{-2; 3\}$.

2. On sait que $\lambda \in \text{sp}(A) \iff \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$. Pour calculer ce rang nous allons utiliser la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}\text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 - \lambda \\ 2 & 4 - \lambda & -2 \\ 5 - \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 - \lambda \\ 0 & 6 - \lambda & 2\lambda - 8 \\ 0 & 6 - \lambda & -\lambda^2 + 8\lambda - 16 \end{pmatrix} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (5 - \lambda)L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 - \lambda \\ 0 & 6 - \lambda & 2\lambda - 8 \\ 0 & 0 & 2(\lambda - 4) + (\lambda - 4)^2 \end{pmatrix} \right) & L_3 \leftarrow L_2 - L_3\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{sp}(A) &\iff 6 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad (2(\lambda - 4) + (\lambda - 4)^2) = 0 \\ &\iff \lambda = 6 \quad \text{ou} \quad (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0 \\ &\iff \lambda = 6 \quad \text{ou} \quad \lambda = 4 \text{ ou } \lambda = 2\end{aligned}$$

Donc $\text{sp}(A) = \{2; 4; 6\}$.

3. La matrice A est triangulaire donc on peut affirmer que $\text{sp}(A) = \{2; 1; -2\}$.

4. On sait que $\lambda \in \text{sp}(A) \iff \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$. Or on a

$$\begin{aligned}\text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ -1 & -1 - \lambda & -1 \\ -2 & -4 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 - \lambda \\ -1 & -1 - \lambda & -1 \\ -\lambda & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 - \lambda \\ 0 & 2 - 2\lambda & -5 + \lambda \\ 0 & -4 + 4\lambda & 2 - 3\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 - \lambda \\ 0 & 2 - 2\lambda & -5 + \lambda \\ 0 & 0 & -8 - \lambda + \lambda^2 \end{pmatrix} \right) & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{sp}(A) &\iff 2 - 2\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad -8 - \lambda + \lambda^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{1 - \sqrt{33}}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{sp}(A) = \left\{ 1; \frac{1 + \sqrt{33}}{2}; \frac{1 - \sqrt{33}}{2} \right\}.$$

5. On sait que $\lambda \in \text{sp}(A) \iff \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$. Or on a

$$\begin{aligned}\text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -\lambda & 6 & 6 \\ -2 & 8 - \lambda & 6 \\ 2 & -6 & -4 - \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 - \lambda \\ -2 & 8 - \lambda & 6 \\ -\lambda & 6 & 6 \end{pmatrix} \right) & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 - \lambda \\ 0 & 2 - \lambda & 2 - \lambda \\ 0 & 12 - 6\lambda & 12 - 4\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + \lambda L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 - \lambda \\ 0 & 2 - \lambda & 2 - \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix} \right) & L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{sp}(A) &\iff 2 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad 2\lambda - \lambda^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2.\end{aligned}$$

Donc $\text{sp}(A) = \{0; 2\}$.

6. On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \lambda & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (\cos(\theta) - \lambda)^2 + \sin^2(\theta) = 0 \\ &\iff 1 - 2\cos(\theta)\lambda + \lambda^2 = 0 \\ &\iff \lambda = e^{i\theta} \text{ ou } \lambda = e^{-i\theta}.\end{aligned}$$

Il nous faut alors discuter sur la valeurs de θ car ces valeurs propres peuvent être réelles ou non.

- Si $\theta \equiv 0[2\pi]$: alors $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$.
- Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$: alors $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-1\}$.
- Sinon : $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{e^{i\theta}; e^{-i\theta}\}$.

7. On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 8 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 4\lambda + 11 = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{4 + i\sqrt{28}}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{4 - i\sqrt{28}}{2} \\ &\iff \lambda = 2 + i\sqrt{7} \text{ ou } \lambda = 2 - i\sqrt{7}.\end{aligned}$$

Donc $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2 + i\sqrt{7}; 2 - i\sqrt{7}\}$.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2 :

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur propre (non nul) associé à la valeur propre λ .
On sait que $f^2 + f + \text{id}_E = 0$ donc on a $f^2(\vec{u}) + f(\vec{u}) + \vec{u} = 0$.
Or $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ et donc $f^2(\vec{u}) = f(f(\vec{u})) = f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) = \lambda^2\vec{u}$.
On a donc $\lambda^2\vec{u} + \lambda\vec{u} + \vec{u} = 0$ et donc $(\lambda^2 + \lambda + 1)\vec{u} = 0$.
Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a nécessairement $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

2. On a montré dans la question précédente que les valeurs propres de f sont forcément des solutions de $x^2 + x + 1 = 0$. Or cette équation n'admet pas de solution réelle.
Donc f n'admet pas de valeur propre.

CORRECTION DE L'EXERCICE 3 :

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -10 \\ 5 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 21 & 0 & -20 \\ 10 & 1 & -10 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On a donc $A^4 - 2A^3 - A^2 + 3A = A$.

2. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

On a donc $AX = \lambda X$, $A^2X = A(AX) = \lambda AX = \lambda^2X$ et de même $A^3X = \lambda^3X$ et $A^4X = \lambda^4X$.

En appliquant multipliant par la droite par X la relation de la question précédente, on obtient :

$$\lambda^4X - 2\lambda^3X - \lambda^2X + 3\lambda X = \lambda X \iff (\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda)X = 0.$$

Comme X est non nul, on a nécessairement $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$.

Résolvons maintenant cette équation : $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$.

Or, 1 et -1 sont des racines évidentes de $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$. On peut donc factoriser ce polynôme en λ par $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. On obtient alors :

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0.$$

Donc, si λ est une valeur propre de A alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$.

Attention on a pas démontré ici que 0, 1, 2 et -1 sont des valeurs propres!!!

En conclusion, $\text{sp}(A) \subset \{0, -1, 1, 2\}$.

3. Il faut regarder si les équations $AX = 0$, $AX = X$, $AX = -X$ et $AX = 2X$ admettent une infinité de solutions.
 - $AX = 0 \iff x = y = z = 0$ donc 0 n'est pas une valeur propre.
 - $AX = X \iff x = y = z$ donc 1 est bien une valeur propre.
 - $AX = -X \iff \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$. Donc -1 est bien une valeur propre.
 - $AX = 2X \iff \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \end{cases}$. Donc 2 est bien une valeur propre.

En conclusion $\text{sp}(A) \subset \{-1, 1, 2\}$.

Autre méthode : vérifier si A , $A - 1I_3$, $A - (-1)I_3$ et $A - 2I_3$ sont inversibles.