Banque G2E 2021 :
Durée : 4 heures

Problème 1 :

La partie A est consacrée à la résolution d'une équation différentielle (E). Deux fonctions sont étudiées en partie B : d'une part, une solution particulière de (E) qui est une fonction de densité et d'autre part une fonction permettant le calcul d'une intégrale généralisée à l'aide d'une série. Dans la partie C, on calcule une espérance et on utilise le résultat obtenu en partie B pour en déduire une variance.

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) ci-dessous à résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(1+\mathrm{e}^x)y' - y + \left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)^2 = 0.$$

1. a) Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$
   b) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. a) Appliquer la méthode de variation de la constante et en déduire que y est solution de (E) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\left(\lambda + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right).$$
   b) En discutant selon λ, déterminer un équivalent (le plus simple possible) de cette solution au voisinage de $+\infty$.

Partie B : Études de fonctions

On considère les fonctions f et g_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}, \quad g_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k}.$$

1. a) Vérifier que f est une solution de (E) et étudier sa parité.
   b) Étudier les variations de f.
   c) Démontrer que f est une fonction de densité (dorénavant X désigne une variable aléatoire réelle dont f est une densité).
2. a) Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k}.$$
   b) À l'aide d'une série géométrique de raison $-\mathrm{e}^{-t}$, démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) + (-1)^{n+1}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t.$$
   c) En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) - g_n(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}.$$
   d) En déduire enfin que :
$$\left|\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

3. a) Démontrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) est absolument convergente (on admet que sa somme est $\dfrac{\pi^2}{12}$).

   b) Déduire de ce qui précède que :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie C : Espérance et variance

1. a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

   b) Justifier que X admet une espérance et la calculer (on pourra considérer la parité de f).

2. Dans la dernière question de ce problème, on cherche à démontrer que X admet une variance et à la calculer.

   a) À l'aide de deux intégrations par parties, que l'on justifiera avec soin, démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x.$$

   b) Conclure.

Problème 2 :

Ce problème débute par l'étude probabiliste de la position d'un virus informatique. Cette étude menée en partie A amène à calculer une moyenne et une variance empirique en partie B. Un changement de modélisation aboutit à la résolution d'une équation matricielle (c'est-à-dire dont l'inconnue est une matrice) en partie C, cette étude étant complétée en partie D.

Dans tout le problème p désigne un réel appartenant à $]0,1[$ et on note $q = 1-p$.

Partie A : Une matrice diagonalisable

Un réseau informatique est constitué de deux serveurs notés A et B. À une date initiale, un virus s'introduit dans le serveur A. Au bout de deux semaines, ce virus reste en A avec une probabilité de p ou quitte A pour aller en B avec une probabilité de q. De même, s'il est en B, au bout de deux semaines, il peut y rester avec une probabilité de p ou revenir en A avec une probabilité de q. On admet qu'à chaque nouvelle quinzaine, le virus peut rester sur le même serveur ou le quitter avec les probabilités p et q.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la probabilité de l'évènement ≪ le virus se trouve en A au bout de $2n$ semaines ≫ et v_n la probabilité de l'évènement ≪ le virus se trouve en B au bout de $2n$ semaines ≫.

1. Déterminer une expression de u_{n+1} en fonction de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier avec soin votre réponse.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note C_n la matrice colonne de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de coefficients u_n et v_n.

   a) Préciser C_0 et déterminer $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = MC_n.$$

   b) Justifier sans calcul que M est diagonalisable puis déterminer les espaces propres et les valeurs propres de M. En déduire qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant telles que :

$$M = PDP^{-1}.$$

   c) Calculer $PP^\top$ (produit de P par sa transposée) et en déduire P^{-1}.

3. a) Déduire de ce qui précède, une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

   b) Ces suites sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites.

4. Quels résultats obtiendrait-on si le virus avait été initialement positionné sur le serveur B ?

Partie B : Moyenne et variance empiriques

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si au bout de $2i$ semaines le virus est sur le serveur A et -1, s'il est sur le serveur B. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n la moyenne empirique de $(X_0, \ldots, X_n)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_i pour tout $i \in \mathbb{N}$.
2. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i < j$.
   a) Justifier que :
   $$\mathbb{P}(X_j = 1 | X_i = 1) = \mathbb{P}(X_{j-i} = 1).$$
   b) En déduire une expression de $\mathbb{P}(X_j = 1, X_i = 1)$.
   c) Déterminer de même une expression de $\mathbb{P}(X_j = -1, X_i = 1)$, $\mathbb{P}(X_j = 1, X_i = -1)$ et $\mathbb{P}(X_j = -1, X_i = -1)$.
   d) En déduire que $\mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \mathbb{P}(X_{j-i} = 1)$ puis calculer $\mathbb{E}(X_i X_j)$.
3. a) Déterminer l'espérance de M_n.
   b) Démontrer par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left(M_n^2\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{E}(X_i X_j).$$
   c) Déduire de ce qui précède une expression de l'espérance de la variance empirique de $(X_0, \ldots, X_n)$.

Partie C : Équation matricielle

On souhaite modéliser la position du virus toutes les semaines plutôt que toutes les quinzaines. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note donc w_n la probabilité de l'évènement « le virus se trouve en A au bout de n semaines » et x_n la probabilité de l'évènement « le virus se trouve en B au bout de n semaines ». Enfin on note D_n la matrice colonne de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de coefficients w_n et x_n.

1. Quelle relation lie D_{2n} et C_n ?
2. On suppose qu'il existe au moins une matrice $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_{n+1} = N D_n.$$
   a) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(N^2 - M\right) C_n = 0.$$
   b) En déduire que $N^2 = M$.
   c) On pose $\Delta = P^{-1} N P$. Démontrer que $\Delta^2 = D$ et en déduire que Δ est une matrice diagonale et que $p - q$ vérifie une égalité à préciser. Donner alors toutes les matrices Δ solutions de $\Delta^2 = D$.
   d) En déduire enfin qu'il existe au plus deux matrices N solutions du problème.

Partie D : Généralisation de l'équation précédente

On souhaite généraliser la recherche précédente et on se pose la question suivante : peut-on affirmer que pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, il existe une ou plusieurs matrice(s) $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle(s) que $N^2 = M$?

Dans cette partie, on note :
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Démontrer que $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Im} M$.
   b) Démontrer qu'il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que :
   $$M = Q T Q^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. a) Résoudre l'équation $\Theta^2 = T$ d'inconnue $\Theta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Conclure.