Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 3

5 décembre 2025

Durée de l'épreuve : 2h

Le devoir comporte un exercice et un problème indépendants.
La calculatrice n'est pas autorisée. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Les résultats seront soulignés ou encadrés ***à l'aide d'une règle****.*

Exercice

On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. On suppose les lancers indépendants.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on notera F_n l'événement « au n-ème lancer on obtient un face ».

On considère la variable aléatoire T égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face.

1. Donner la loi de T, son espérance et sa variance.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(T > n)$.
3. **Démonstration de cours : le résultat sera démontré rigoureusement**
   Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Comparer $P_{[T>n]}(T > n + m)$ et $P(T > m)$ et donner une interprétation.

On considère la variable aléatoire S égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier double face, c'est-à-dire deux faces consécutifs. On a donc $S \geqslant 2$ et S est égale à 3 si, et seulement si, on a obtenu pile suivi de deux faces aux trois premiers lancers.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = P(S = n)$ et $q_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k$.

4. Déterminer p_1, p_2, p_3 et p_4 puis q_1, q_2, q_3 et q_4.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la probabilité de l'événement $[S > n]$ en fonction de q_n.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \in [0; 1]$ puis que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $p_{n+3} = \dfrac{q_n}{8}$ puis que $q_{n+3} = q_{n+2} - \dfrac{q_n}{8}$.
8. En déduire la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en donner une interprétation.

On dit que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifier une relation de récurrence linéaire d'ordre 3.

Dans notre cas, on peut se ramener à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

9. Démontrer que pour tout entier n non nul, on a $q_{n+2} = \dfrac{q_{n+1}}{2} + \dfrac{q_n}{4}$.
10. Déterminer les racines du polynôme $X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4}$.
    On les notera r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$.
11. Démontrer que le système suivant, d'inconnue $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, admet une unique solution.
$$\begin{cases} Ar_1 + Br_2 = q_1 \\ Ar_1^2 + Br_2^2 = q_2. \end{cases}$$
    On note (α, β) l'unique solution de ce système.
12. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
13. Donner un équivalent de q_n quand n tend vers $+\infty$.
    Cet équivalent pourra faire intervenir α, β, r_1, r_2 et n.

Problème

Dans ce problème, a, b, c et d désignent des entiers naturels.

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lequel I_2 désigne la matrice identité et O_2 la matrice nulle.

Ce problème est consacré à une expérience aléatoire qui peut être représentée par une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. En partie A, on démontre quelques propriétés algébriques des matrices qui permettent cette représentation. En partie B, on étudie cette expérience aléatoire dans un cas particulier. Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A : matrices d'ajout

On considère une expérience aléatoire que l'on suppose modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ et qui nécessite le matériel suivant :

- Un urne de taille infinie contenant initialement une boule noire et une boule blanche.
- Un stock infini de boules noires.
- Un stock infini de boules blanches.

Cette expérience aléatoire consiste à tirer successivement et indéfiniment une boule dans l'urne de façon aléatoire (les boules sont supposées indiscernables au toucher). À chaque étape, on note la couleur de la boule tirée, on la replace dans l'urne et on ajoute d'autres boules selon une règle fixée pendant toute l'expérience : si on a tiré une boule noire, on ajoute dans l'urne a boules noires et b boules blanches, si on a tiré une boule blanche, on ajoute c boules noires et d boules blanches.

Cette règle est résumée par la matrice ci-dessous dite « matrice d'ajout » :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Lorsque $a + b = c + d$, on notera σ_A cette valeur commune et on dira que la matrice d'ajout A est équilibrée. On notera $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices d'ajout équilibrées (c'est-à-dire l'ensemble des matrices de taille 2, à coefficients entiers naturels et dont la somme des coefficients sur la première ligne est égale à la somme des coefficients sur la seconde ligne) :

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / (a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4 \text{ et } a + b = c + d \right\}.$$

1. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) À une certaine étape, l'urne contient 3 boules noires et 5 blanches et on tire une boule noire. Quelle est la composition de l'urne à l'étape suivante ?

   b) Calculer σ_A. Que représente σ_A ? Est-il possible qu'à une certaine étape, il y ait 22 boules blanches et 20 boules noires (justifier votre réponse) ?

2. On revient au cas général.

   a) (i) Démontrer que $\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ et } x + y = z + t \right\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (ii) Justifier que $\mathscr{A}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   b) Démontrer que :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \quad \sigma_A = 0 \Longleftrightarrow A = O_2.$$

3. A désigne toujours une matrice appartenant à $\mathscr{A}$.

   a) Montrer que $d - b = a - c$. On note δ_A cette valeur commune.

   b) Montrer que le déterminant de A est égal à $\sigma_A \delta_A$.

   c) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que $AA' = \sigma_A \delta_A I_2$.

   d) En déduire que A est inversible d'inverse A^{-1} appartenant à $\mathscr{A}$ si, et seulement si :

$$A = I_2 \quad \text{ou } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B : une matrice d'ajout particulière

On fixe $\sigma \in \mathbb{N}$ et on réalise l'expérience aléatoire précédemment décrite dans le cas où

$$A = \sigma I_2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ème tirage est noire, 0 si la boule tirée au n-ème tirage est blanche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la variable aléatoire réelle S_n égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne à l'issue du n-ème tirage.

4. a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par S_n et justifier que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le système $(\mathscr{S})$ ci-dessous :

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{cases} S_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} = S_n + \sigma X_{n+1}. \end{cases}$$

   b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in S_n(\Omega)$:

$$P_{[S_n=s]}(X_{n+1} = 1) = \frac{s}{2 + \sigma n}.$$

5. a) En calculant $P(X_{n+1} = 1)$, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_{n+1}) = \frac{E(S_n)}{2 + \sigma n}.$$

   b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2}.$$

   c) En déduire enfin la loi de X_n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

BONUS

6. Montrer que si A et A' appartiennent à $\mathscr{A}$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A + kA' \in \mathscr{A}$.
7. Montrer que si A et A' appartiennent à $\mathscr{A}$ alors $AA' \in \mathscr{A}$.