Correction du devoir maison n° 9

1. Sous les hypothèses de cette question on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $nin\mathbb{N}^*$

$$u_n f(nx) = nx - \frac{1}{2}$$

et
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)\\ &= n\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{n}\times\frac{(n-1)n}{2}\\ &= nx-\frac{n}{2}+\frac{n-1}{2} = nx-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

La suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$.

2. (u_n) est adaptée à f et f est dérivable donc les deux termes de l'égalité $(\star)$ sont dérivables et on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$nu_n f'(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

La suite (nu_n) est donc adaptée à f'.

3. a) Par le calcul, en utilisant la linéarité de l'intégrale on a $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$.

```
def intsomme(L):
    return sum([L[k]/(k+1) for k in range(len(L))])
```

b) $B_1' = 1 \times B_0 = 1$ donc $B_1 = X + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Et $\displaystyle\int_0^1 B_1(t)\mathrm{d}t = 0$ nous donne $c = -\dfrac{1}{2}$. Donc $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$.
De même, $B_2' = 2X - 1$ donc $B_2 = X^2 - X + c$ et $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)\mathrm{d}t = 0$ nous donne $c = \dfrac{1}{6}$. Donc $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.
D'après la question 1., $B_1 \in E$.
Et on a $nB_0(nx) = n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_0\left(x+\frac{k}{n}\right)$ donc la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à B_0 et donc $B_0 \in E$.
Autre méthode : $B_0 = B_1'$ donc d'après la question 2., la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à B_0 et donc $B_0 \in E$.

c) Raisonnons par récurrence.
On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$: « B_p est de degré p et de coefficient dominant 1 »
$\mathscr{P}(0)$ est vraie par définition de B_0.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(p-1)$ vraie.
On peut alors écrire $B_{p-1} = X^{p-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-2} b_k X^k$.
Donc $B_p' = pB_{p-1}$ implique $B_p = X^p + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-2} \frac{pb_k}{k+1} X^{k+1} + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
Cela montre que $\mathscr{P}(p)$ est vraie.
Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $p \in \mathbb{N}$, B_p est de degré p et de coefficient dominant 1.

d) (i) Supposons que B_p appartient à E. Il existe alors une unique suite adaptée à B_p (car fonction non nulle). Notons cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
D'après la question 2. $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à $B_p' = pB_{p-1}$ donc $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à B_{p-1} (et c'est la seule !).

Par un récurrence facile on obtient que pour $q \in [\![0;p]\!]$, $(n^q u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est l'unique suite adaptée à B_{p-q}.

Or $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est l'unique suite adaptée à B_0 donc $n^p u_n = n$ et donc $u_n = \dfrac{1}{n^{p-1}}$.

Cela prouve que s'il y a une suite adaptée à B_p c'est forcément la suite $\left(\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(ii) φ est dérivable comme somme de fonction dérivable et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) &= \frac{1}{n^{p-2}} B'_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B'_p\left(x + \frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^{p-2}} pB_{p-1}(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} pB_{p-1}\left(x + \frac{k}{n}\right) \\
&= p\left(\frac{1}{n^{p-2}} B_{p-1}(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_{p-1}\left(x + \frac{k}{n}\right)\right) \\
&= p \times 0 = 0,
\end{aligned}$$

car on a supposé que B_{p-1} possède une suite adaptée et d'après la question précédente cette suite est forcément $\left(\dfrac{1}{n^{p-2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

φ est donc bien constante.

(iii) Par définition de φ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/n} \varphi(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{n^{p-1}} \int_0^{1/n} B_p(nx)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1/n} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n^p} \int_0^1 B_p(u)\mathrm{d}u - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} B_p(s)\,\mathrm{d}s \\
&\qquad \text{changements de variable } u = nx \text{ et } s = x + \frac{k}{n} \\
&= \frac{1}{n^p} \times 0 - \int_0^1 B_p(s)\mathrm{d}s \qquad\qquad \text{Chasles} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(iv) φ est constante et son intégrale entre 0 et $\dfrac{1}{n}$ est nulle donc φ est nulle.

On a donc montré que si on suppose que B_{p-1} appartient à E alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à B_p.

Comme $B_0 \in E$, on a en fait fait toutes les étapes d'un raisonnement par récurrence.

On a donc montré que pour tout entier p, B_p appartient à E.