Devoir maison n$^{\text{o}}$ 1

À rendre le 15 septembre 2025

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$.
ainsi que la fonction numérique f des variables x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in]0;+\infty[\times]0;+\infty[, \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{x+4y}\ln(xy).$$

I. Étude des zéros de φ

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln 2 \approx 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs, α et β tels que
$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \text{ avec } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} < \beta.$$
6. Proposer un programme en Python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}. On utilisera le procédé de dichotomie.

II. Points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x et y strictement positifs :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y) + \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4f(x,y) + \dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}.$$
3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et établir que :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}.$$