Banque Agro-véto 2021 Maths
Correction

Partie I : modèle d'évolution de Wright-Fisher

I. Étude d'un cas particulier

Dans ce cas particulier, les variables X_n ne prennent que 3 valeurs : 0, 1, 2.

1. La famille $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ forme un système complet d'événement. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_n = 0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) \\ &= P(X_n = 0) \times 1 + P(X_n = 1) \times \frac{1}{4} + P(X_n = 2) \times 0 \end{aligned}$$

De même

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) \times 0 + P(X_n = 1) \times \frac{1}{2} + P(X_n = 2) \times 0$$
$$P(X_{n+1} = 2) = P(X_n = 0) \times 0 + P(X_n = 1) \times \frac{1}{4} + P(X_n = 2) \times 1$$

On a donc $V_{n+1} = MV_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminons tout d'abord les valeurs propres de M. On sait que λ est une valeur propre de M si, et seulement si, $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est-à-dire de rang strictement inférieur à 3. Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M - \lambda I_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1-\lambda \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \end{pmatrix}\right) L_2 \leftrightarrow L_3 \\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix}\right) C_2 \leftrightarrow C_3 \end{aligned}$$

Ainsi, $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\lambda = 1$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$ et donc les valeurs propres de M sont 1 et $\frac{1}{2}$.

Déterminons une base des sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres.

En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on a :

$$MX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{4}y = x \\ \frac{1}{2}y = y \\ \frac{1}{4}y + z = z \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$$

On a donc $E_1(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ étant visiblement libre (deux vecteurs non proportionnels) et génératrice de $E_1(M)$, c'est une base de $E_1(M)$ qui est donc de dimension 2.

De plus :

$$MX = \frac{1}{2}X \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{4}y + z = \frac{1}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases} .$$

Donc $E_{1/2}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ étant visiblement libre (un seul vecteur non nul) et génératrice de $E_{1/2}(M)$, c'est une base de $E_{1/2}(M)$ qui est donc de dimension 1.

Ainsi, $\dim(E_1(M)) + \dim(E_{1/2}(M)) = 3$ et $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc M est diagonalisable.

De plus $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de vecteurs propres de M donc on aura $M = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n) : M^n = \begin{pmatrix}1 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 0\\0 & \frac{1}{2^n} & 0\\0 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 1\end{pmatrix}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   — Pour $n = 0$: on sait que $M^0 = I_3$.
   De plus $\begin{pmatrix}1 & \frac{2^0-1}{2^{0+1}} & 0\\0 & \frac{1}{2^0} & 0\\0 & \frac{2^0-1}{2^{n+1}} & 1\end{pmatrix} = I_3$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   — Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée. On a alors :

$$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix}1 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 0\\0 & \frac{1}{2^n} & 0\\0 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4} + \frac{2^n-1}{2^{n+2}} & 0\\0 & \frac{1}{2^{n+1}} & 0\\0 & \frac{2^n-1}{2^{n+2}} + \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix},$$

   Comme $\dfrac{2^n-1}{2^{n+2}} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2^n-1+2^n}{2^{n+2}} = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}}$, on a bien vérifié $\mathscr{P}(n+1)$.

   Grâce au principe de récurrence, on a montré que, pour tout entier n, $M^n = \begin{pmatrix}1 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 0\\0 & \frac{1}{2^n} & 0\\0 & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & 1\end{pmatrix}$.

   Autre méthode : montrer que $M^n = PD^nP^{-1}$ et calculer P^{-1}.

4. a) X_n étant une variable finie, elle admet une espérance et

$$E(X_n) = 0 \times P(X_n = 0) + 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2).$$

   Or, comme $V_{n+1} = MV_n$, on peut montrer facilement par récurrence que $V_n = M^nV_0$.
   On en déduit donc que $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{2^n}P(X_0 = 1)$ et $P(X_n = 2) = \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}}P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2)$.
   On a donc

$$E(X_n) = \frac{1}{2^n}P(X_0 = 1) + \frac{2^n-1}{2^n}P(X_0 = 1) + 2P(X_0 = 2) = P(X_0 = 1) + 2P(X_0 = 2) = E(X_0).$$

   On a bien $E(X_n) = E(X_0)$ pour tout entier n.

   b) Comme $[X_n \in \{0, 2\}] = [X_n = 0] \cup [X_n = 2]$ et que les deux événements sont incompatibles on a :

$$\begin{aligned}P(X_n \in \{0,2\}) &= P(X_n = 0) + P(X_n = 2)\\ &= P(X_0 = 0) + \frac{2^n-1}{2^{n+1}}P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2) + \frac{2^n-1}{2^{n+1}}P(X_0 = 1)\\ &= P(X_0 = 0) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2),\end{aligned}$$

   et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n \in \{0, 2\}) = P(X_0 = 0) + P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2) = 1$, car $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ et $([X_0 = 0], [X_0 = 1], [X_0 = 2])$ forme un système complet d'événements.

II. Cas général

5. a) On remarque que $\binom{2N}{j}\left(\frac{i}{2N}\right)^j\left(1-\frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$ correspond à $P(Y=j)$ où Y suit une loi binomiale de paramètres $2N$ et $\frac{i}{2N}$.

Avec ces notations, on a alors $S_i = \sum_{j=0}^{n} jP(Y=j)$ et donc S_i correspond à l'espérance de la variable aléatoire Y.

D'après notre cours, on a donc $S_i = 2N \times \frac{i}{2N} = i$.

b) X_{n+1} est une variable aléatoire réelle finie, elle admet donc une espérance qui est donnée par :

$$E(X_{n+1}) = \sum_{j=0}^{2N} jP(X_{n+1}=j).$$

Or $([X_n = i])_{i\in[\![0;2N]\!]}$ forme un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1}=j) = \sum_{i=0}^{2N} P(X_n=i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=j).$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{2N} j\left(\sum_{i=0}^{2N} P(X_n=i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=j)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{2N} P(X_n=i)\left(\sum_{j=0}^{2N} jP_{[X_n=i]}(X_{n+1}=j)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{2N} P(X_n=i)S_i = \sum_{i=0}^{2N} iP(X_n=i) = E(X_n)
\end{aligned}$$

On a donc bien $E(X_{n+1}) = E(X_n)$ pour tout entier n.

c) Le nombre moyen d'allèle de type A est donc constant au sein des différentes générations.

6. a) On a $[X_{n+1}\in\{0;2N\}] = [X_{n+1}=0]\cup[X_{n+1}=2N]$. Donc, comme les événements sont incompatibles :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}\in\{0;2N\}) = P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=0) + P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=2N) = \left(1-\frac{k}{2N}\right)^{2N} + \left(\frac{k}{2N}\right)^{2N}.$$

Or on a supposé que $1 \leqslant k \leqslant 2N-1$ donc $\frac{k}{2N} \geqslant \frac{1}{2N}$ et $1-\frac{k}{2N} \geqslant \frac{1}{2N}$.

Par croissance de la fonction $x\mapsto x^{2N}$, on obtient bien $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}\in\{0;2N\}) \geqslant 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.

b) D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i\in[\![0;2N]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{2N} P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}\in\{0;2N\})\\
&= P(X_n=0) + \sum_{k=1}^{2N-1} P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}\in\{0;2N\}) + P(X_n=2N)\\
&= u_n + \sum_{k=1}^{2N-1} P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}\in\{0;2N\})\\
&\geqslant u_n + 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}\underbrace{\sum_{k=1}^{2N-1} P(X_n=k)}_{=1-u_n}
\end{aligned}$$

On a donc bien $u_{n+1} \geqslant u_n + 2(1-u_n)\left(\dfrac{1}{2N}\right)^{2N}$.

c) On peut remarquer que la suite (w_n) est arithmético-géométrique : $w_{n+1} = (1-\alpha)w_n + \alpha$.
On pose alors $z_n = w_n - 1$. On a $z_{n+1} = (1-\alpha)z_n$, suite géométrique.
On en déduit que pour tout entier n, $z_n = (1-\alpha)^n z_0$ et donc $w_n = (1-\alpha)^n(w_0 - 1) + 1$.
Comme $\alpha \in]0;1[$, on a $1-\alpha \in]0;1[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\alpha)^n = 0$.
La suite (w_n) est donc bien convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

d) On note dans cette question $\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2N}\right)^{2N} \in]0;1[$ (car $N \geqslant 1$) et w_n la suite associée définie dans la question précédente.
Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geqslant w_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

— Pour $n = 0$, c'est évidemment vrai car $w_0 = u_0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
D'après la question 6. (b) on a :

$$u_{n+1} \geqslant u_n + \alpha(1-u_n) = (1-\alpha)u_n + \alpha.$$

Or $1-\alpha \in]0;1[$ donc $(1-\alpha)u_n \geqslant (1-\alpha)w_n$.
Ainsi, $u_{n+1} \geqslant (1-\alpha)w_n + \alpha = w_{n+1}$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est bien vérifiée.

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant w_n$.
Or par définition de u_n, on a aussi $u_n \leqslant 1$.
Donc $w_n \leqslant u_n \leqslant 1$ et par encadrement de limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
Il est donc presque certain qu'après un grand nombre de générations, le nombre d'allèle de type A soit nul ou égal à $2N$.

Partie II : équilibre de Hardy-Weinberg

7. N_1 compte le nombre d'individus de type 1 dans une population totale de N individus où la proportion d'individus de type 1 est p_1.
N_1 suit donc une loi binomiale de paramètres N et p_1.

8. $E(N_1) = Np_1$ et $V(N_1) = Np_1(1-p_1)$.

9. D'après le théorème de Moivre-Laplace appliqué à la variable aléatoire N_1 qui suit la loi binomiale de paramètres (N, p_1) on a :

$$\lim_{N\to pI} P\left(a \leqslant \frac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1-p_1)}} \leqslant b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

10. a) On sait que $\mathrm{cov}(N_1, N_2) = \mathrm{cov}(N_2, N_1)$. Donc W est une matrice symétriques à coefficients réels (les N_i sont des variables aléatoires réelles).
Ainsi, d'après le théorème spectral, W est diagonalisable (en base orthonormée).

b) D'après notre cours $V(aN_1 + bN_2) = a^2V(N_1) + b^2V(N_2) + 2ab\mathrm{cov}(N_1, N_2)$.
De plus : $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aV(N_1) + b\mathrm{cov}(N_1, N_2) \\ a\mathrm{cov}(N_1, N_2) + bV(N_2) \end{pmatrix} = a^2V(N_1) + b^2V(N_2) + 2ab\mathrm{cov}(N_1, N_2)$.
Donc on a bien $V(aN_1 + bN_2) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

c) Soit λ une valeur propre de W et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
D'après la question précédente, ${}^tXWX = V(xN_1 + yN_2) \geqslant 0$.
Mais on a aussi ${}^tXWX = \lambda\,{}^tXX = \lambda(x^2 + y^2)$.
Or $X \neq 0$, donc $x^2 + y^2 > 0$. On a donc $\lambda = \dfrac{V(xN_1 + yN_2)}{x^2 + y^2} \geqslant 0$.
Les valeurs propres de W sont donc positives.

d) Reprenons les notations de la question précédente et supposons que W admette une valeur propre nulle. On aurait alors $V(xN_1 + yN_2) = 0$ ce qui signifierait que $xN_1 + yN_2$ est une VAR constante.

Or, lorsque $N_1 = 0$ et $N_2 = 0$, on a $xN_1 + yN_2 = 0$, lorsque $N_1 = 0$ et $N_2 = 1$, $xN_1 + yN_2 = y$ et lorsque $N_1 = 1$ et $N_2 = 0$, $xN_1 + yN_2 = x$. Comme x et y ne peuvent pas être simultanément nuls, la VAR $xN_1 + yN_2$ n'est visiblement pas constante.

Donc les valeurs propres de W ne peuvent pas être nulles, elles sont donc strictement positives.

e) Comme W est une matrice symétrique à coefficients réels, on sait qu'elle est diagonalisable en base orthonormée c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible d'inverse ${}^tP$ et une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ telles que :

$$W = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a vu que λ_1 et λ_2, les valeurs propres de W, sont strictement positives.

Donc la matrice $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$ est diagonale et inversible, et on a bien $W = PD^2P^{-1}$.

11. On a :

$$AW\,{}^tA = D^{-1}P^{-1}PD^2P^{-1}\,{}^t(P^{-1})\,{}^t(D^{-1}) = I_2,$$

car $P^{-1} = {}^tP$ donc ${}^t(P^{-1}) = P$ et D est diagonale donc ${}^t(D^{-1}) = D^{-1}$.

On en déduit donc que $V(Y_1) = V(Y_2) = 1$ et $\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = 0$.

12. a) On a $N_1 + N_2 = N - N_3$ donc $V(N_1 + N_2) = (-1)^2V(N_3) = Np_3(1 - p_3)$.

b) Comme $V(N_1 + N_2) = V(N_1) + V(N_2) + 2\mathrm{cov}(N_1, N_2)$ on a :

$$\mathrm{cov}(N_1, N_2) = \frac{Np_3(1 - p_3) - Np_1(1 - p_1) - Np_2(1 - p_2)}{2} = -Np_1p_2$$

c) Calculons tout d'abord le déterminant de W :

$$\det(W) = V(N_1)V(N_2) - \mathrm{cov}(N_1, N_2)^2 = Np_1(1 - p_1)Np_2(1 - p_2) - N^2p_1^2p_2^2) = ... = N^2p_1p_2p_3.$$

Grâce à la formule de l'inverse d'une matrice de taille 2 de notre cours on a donc :

$$W^{-1} = \frac{1}{N^2p_1p_2p_3} \begin{pmatrix} V(N_2) & -\mathrm{cov}(N_1, N_2) \\ -\mathrm{cov}(N_1, N_2) & V(N_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{Np_1p_2p_3} \begin{pmatrix} p_2(1 - p_2) & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_1(1 - p_1) \end{pmatrix}.$$

d) En utilisant le fait que $P^{-1} = {}^tP$ et qu'une matrice diagonale est égale à sa transposée, on a :

$${}^tAA = PD^{-1}D^{-1}\,{}^tP = P(D^2)^{-1}\,{}^tP = W^{-1}.$$

On remarque alors que $Y_1^2 + Y_2^2 = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
Y_1^2 + Y_2^2 &= \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2 \end{pmatrix} {}^tAA \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2 \end{pmatrix} W^{-1} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{Np_1p_2p_3} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(1 - p_2) & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_1(1 - p_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 \\ N_2 - Np_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{Np_1p_2p_3} \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(1 - p_2)(N_1 - Np_1) + p_1p_2(N_2 - Np_2) \\ p_1p_2(N_1 - Np_1) + p_1(1 - p_1)(N_2 - Np_2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{Np_1p_2p_3} \left(p_2(1 - p_2)(N_1 - Np_1)^2 + 2p_1p_2(N_2 - Np_2)(N_1 - Np_1) + p_1(1 - p_1)(N_2 - Np_2)^2\right) \\
&= \frac{1}{Np_1p_2p_3} \left(p_2(p_1 + p_3)(N_1 - Np_1)^2 + 2p_1p_2(N_2 - Np_2)(N_1 - Np_1) + p_1(p_2 + p_3)(N_2 - Np_2)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1^2+Y_2^2 &= \frac{(N_1-Np_1)^2}{Np_1}+\frac{(N_2-Np_2)^2}{Np_2}+\frac{(N_1-Np_1)^2}{Np_3}+\frac{(N_2-Np_2)^2}{Np_3}+\frac{2(N_1-Np_1)(N_2-Np_2)}{Np_3}\\
&= \frac{(N_1-Np_1)^2}{Np_1}+\frac{(N_2-Np_2)^2}{Np_2}+\frac{(N_1-Np_1+N_2-Np_2)^2}{Np_3}\\
&= \frac{(N_1-Np_1)^2}{Np_1}+\frac{(N_2-Np_2)^2}{Np_2}+\frac{(N-N_3-N(1-p_3))^2}{Np_3}\\
&= \frac{(N_1-Np_1)^2}{Np_1}+\frac{(N_2-Np_2)^2}{Np_2}+\frac{(N_3-Np_3)^2}{Np_3}.
\end{aligned}$$

Partie III : étude de la loi limite

13. Notons G la fonction de répartition de la variable aléatoire Z^2.
Comme $Z(\Omega)=\mathbb{R}$, on a $Z^2(\Omega)=\mathbb{R}^+$ et donc $G(t)=0$ pour tout $t<0$.
Pour tout $t \geqslant 0$:
$$G(t)=P(Z^2\leqslant t)=P(-\sqrt{t}\leqslant Z\leqslant \sqrt{t})=\Phi(\sqrt{t})-\Phi(-\sqrt{t}),$$
où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
D'après les propriétés de la fonction Φ, on a $G(t)=2\Phi(\sqrt{t})-1$.
En résumé, $G(t)=\begin{cases}2\Phi(\sqrt{t})-1 & \text{si } t\geqslant 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$.
La fonction Φ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\sqrt{t}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la fonction nulle étant $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
G est donc aussi continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+}G(t)=G(0)=0=\lim\limits_{t\to 0^-}G(t)$ et ainsi G est continue sur $\mathbb{R}$.
On peut donc affirmer que Z^2 est une variable à densité. On obtient une densité de Z^2 en dérivant la fonction G là où c'est possible et en « complétant » les points manquant.
Une densité de Z^2 est donc définie par :
$$f_{Z^2}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Phi'(\sqrt{t}) & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si } t\leqslant 0\end{cases}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-t/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}},$$
car $\Phi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

14. D'après la formule de Kœnig-Huygens :
$$E(Z^2)=V(Z)+E(Z)^2=1+0^2=1.$$
Pour calculer la variance de Z^2 commençons tout d'abord par calculer son moment d'ordre 2, c'est-à-dire l'espérance de Z^4.
Sous réserve de convergence absolue, d'après la formule de transfert :
$$E(Z^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$
La fonction $t\mapsto\dfrac{t^4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$ étant paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ et en cas de convergence $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.
On pose alors :
$$\begin{aligned}
u(t)&=t^3 & u'(t)&=3t^2\\
v'(t)&=\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2} & v(t)&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}
\end{aligned}$$
Comme u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$ par croissance comparée, le théorème d'intégration par parties généralisé nous dit que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{-3t^2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

On reconnait alors ici l'intégrale entrant en jeu dans le calcul du moment d'ordre 2 d'une variable suivant la loi normale centrée réduite. Comme on sait que ce moment d'ordre existe, on peut affirmer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$ est convergente donc Z^4 admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(Z^4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \\ &= \lim_{t\to+\infty} 2u(t)v(t) - 2u(0)v(0) + 2\int_0^{+\infty} \frac{3t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \\ &= 3E(Z^2) = 3. \end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens, Z^2 admet une variance et :

$$V(Z^2) = E(Z^4) - E(Z^2)^2 = 3 - 1 = 2.$$

15. On considère donc le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$, qui est un changement de variable $\mathscr{C}^1$ sur $[0;x]$ et strictement croissant. D'après le théorème de changement de variable généralisé :

$$h(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xu(x-xu)}} x\,du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2}}\,du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\,du,$$

car $x > 0$.
Donc $h(x) = h(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, h est constante.

16. a) Comme Z_1 et Z_2 sont indépendantes, on sait que Z_1^2 et Z_2^2 sont aussi indépendantes. De plus on a montré à la question 13. que ce sont des variables à densité.
Donc $Z_1^2 + Z_2^2$ est une variable à densité dont une densité est la fonction s définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_1^2}(x-t) f_{Z_2^2}(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(x-t)}} e^{-(x-t)/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(x-t) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Si $x \leqslant 0$, on a donc $s(x) = 0$ et pour $x > 0$:

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-x/2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt = \frac{C}{2\pi} e^{-x/2}.$$

Ainsi $s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{C}{2\pi} e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

b) On sait qu'une densité de probabilité doit vérifier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s(x)\,dx = 1$. C doit donc vérifier :

$$\int_0^{+\infty} \frac{C}{2\pi} e^{-x/2}\,dx = 1 \Leftrightarrow C = \pi.$$

Par linéarité de l'espérance $E(Z_1^2 + Z_2^2) = 2E(Z^2) = 2$.
Comme Z_1^2 et Z_2^2 sont indépendantes $V(Z_1^2 + Z_2^2) = 2V(Z^2) = 4$.
On aurait aussi pu remarquer que $Z_1^2 + Z_2^2$ suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.