Exercices : Fonctions de deux variables

Domaine de définition, calcul différentiel, ...

Exercice 1 :

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer le domaine de définition, représenter ce domaine (lorsque cela est pertinent), puis calculer les dérivées partielles d'ordre 1.

1. $f(x,y) = \ln(x)\mathrm{e}^y + \dfrac{x}{y^3} - 2\cos(y)$;
2. $f(x,y) = \ln(x-1)\sqrt{y} + \sqrt{x+y-3}$;
3. $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(y-x)$;
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4x-2y+1} - 3\ln(x^2y)$.

Exercice 2 :

Soit $f(x,y) = \ln(1-xy)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et le représenter graphiquement.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ fixé. Quel est l'ensemble de définition de l'application partielle $h : x \mapsto f(x,\lambda)$. Quel est son sens de variation ?
3. Représenter graphiquement dans un repère orthonormé la ligne de niveau 2.
4. En utilisant un programme Python, tracer la surface représentative de f pour $|x| \leqslant 3$ et $|y| \leqslant 3$.

Exercice 3 :

Soit la fonction définie sur $\mathscr{P} =]-1;1[^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = \dfrac{1}{2}$.

1. Montrer que f est bornée sur son ensemble de définition.

   Indication : on pourra commencer par démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. Soit $x \in]-1;1[$, $x \neq 0$. Calculer $f(x,x)$ puis $f(x,0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^y$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
3. Donner une approximation des « variations élémentaires » de f au voisinage de $(1,1)$.

Exercice 5 :

La loi des gaz parfaits peut prendre la forme $PV = nrT$ où n est le nombre de molécules de gaz, V le volume, T la température, P la pression et r une constante.

Montrer que $\dfrac{\partial V}{\partial T} \times \dfrac{\partial T}{\partial P} \times \dfrac{\partial P}{\partial V} = -1$.

Exercice 6 :

Pour une fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ sur un domaine U on définit son laplacien par :

$$\forall (x,y,z) \in U, \qquad \Delta g(x,y,z) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,y,z).$$

On considère une fonction u de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
2. a) Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}u''(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) + \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}u'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

   b) Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, u' et u''. (*Il restera encore un peu de x, y et z...*)

   c) En déduire une expression du laplacien de f en fonction de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, u' et u''.
3. On suppose maintenant que $\Delta f = 0$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par u sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Résoudre cette équation.

Exercice 7 :

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On cherche les fonctions $u : (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u(t,x) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + 2tx\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 \qquad \text{et} \qquad u(0,x) = u_0(x). \qquad (E)$$

1. On suppose dans cette question que u est solution de (E).
   a) Soit X une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
   Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto u(t, X(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t)$ en fonction de t, X' et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.
   b) Déterminer alors des fonctions X telles que φ est constante sur $\mathbb{R}$.
2. (**Pour aller plus loin...**)
   Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   On pose, pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(t,y) = u(t, y\mathrm{e}^{t^2})$.
   a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.
   b) Montrer que si u est solution de (E) alors $\forall (y,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 0$.
   c) Résoudre alors l'équation (E).

Recherche d'extremum

Exercice 8 :

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x,y) = x^2 - 4x + y^3 - 3y$.

1. Montrer que f admet un extremum potentiel uniquement en $(2,1)$ ou en $(2,-1)$.
2. Montrer que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R} \times [-3;+\infty[$, $f(2+h,1+k) - f(2,1) \geqslant 0$.
3. En déduire que f possède un minimum local en $(2,1)$. Est-ce un minimum global ?
4. En observant $f(2+t,-1)$ et $f(2,-1+t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, conclure quant à l'autre extremum potentiel.

Exercice 9 :

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$.

1. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point.
2. Montrer que f possède exactement 3 points critiques.
3. a) Calculer $f(0,0)$ et étudier le signe de $f(x,0)$ et $f(0,x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
   b) Que peut-on en déduire ?
4. a) Calculer $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, puis $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + h, k\right) - f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.
   b) Que peut-on en déduire pour f ?

Pour aller plus loin...

Exercice 10 :

Soit (S) la surface représentative de la fonction $f : (x,y) \mapsto x((\ln(x))^2 + y^2)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à (S) en $B(\mathrm{e}^{-1}, 1, 2\mathrm{e}^{-1})$, puis montrer que la surface traverse le plan tangent au voisinage du point B.

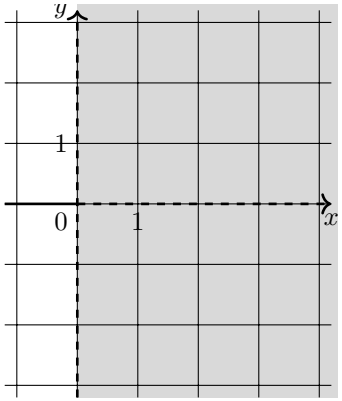
Exercice 11 :

1. On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ par :
$$g(x) = \ln(x) + 2x + 1.$$
   a) Étudier les variations de g et déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
   b) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $\left]0; \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, tel que $g(\alpha) = 0$.
2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \ f(x,y) = x\left(\ln(x) + x + y^2\right).$$
   a) Déterminer le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
   b) (i) Démontrer que, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ proches de 0,
$$f(\alpha + h, k) - f(\alpha, 0) = k^2(\alpha + h) + o(h).$$
   (ii) Que peut-on en déduire ?

Correction

Correction de l'exercice 1 :

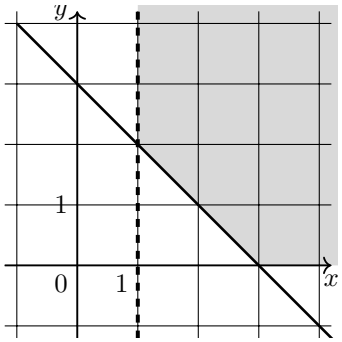
1. $\mathscr{D}_f =]0;+\infty[\times\mathbb{R}^*$.



f est dérivable par rapport à chacune de ses deux variables sur son domaine de définition. De plus, $\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{e}^y}{x} + \frac{1}{y^3} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)\mathrm{e}^y - \frac{3x}{y^4} + 2\sin(y).$$

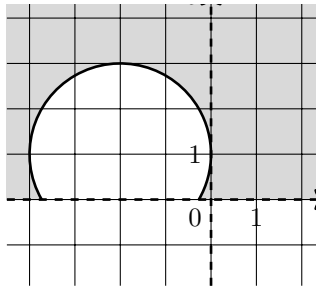
2. $\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x-1>0 \text{ et } y \geqslant 0 \text{ et } x+y-3 \geqslant 0\}$.



Attention, f n'est pas dérivable par rapport à x en tout point du type $(x,-x+3)$ et f n'est pas dérivable par rapport à y en tout point du type $(x,0)$ ou $(x,-x+3)$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x+y-3}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{x+y-3}}$.

3. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2$ (on ne va pas le dessiner....). f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à ses deux variables et :
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)\left(\cos(x)\sin(y-x) - \sin(x)\cos(y-x)\right) = \sin(y)\sin(y-2x)$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x)\left(\cos(y)\sin(y-x) + \sin(y)\cos(y-x)\right) = \sin(x)\sin(2y-x)$

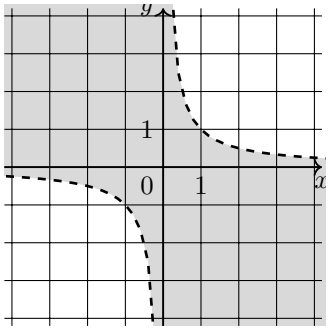
4. $\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2+4x-2y+1 \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } y>0\}$.
On peut alors remarquer que $x^2+y^2+4x-2y+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2 \geqslant 4$, donc la zone du plan correspondant à la contrainte $x^2+y^2+4x-2y+1 \geqslant 0$ est la zone située à l'extérieur du cercle de centre $A(-2,1)$ et de rayon 2.



Encore une fois f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x ou à y en tous les points tels que $x^2+y^2+4x-2y+1=0$. En tous les autres points du domaine de définition on a :
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+1}} - \frac{6}{x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+1}} - \frac{3}{y}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. $\mathscr{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy<1\}$.
Pour déterminer la zone du plan correspondant à la contrainte $xy<1$ il faut utiliser la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$. Mais **attention**, pour $x>0$, $xy<1$ est équivalent à $y < \frac{1}{x}$ mais pour $x<0$, $xy<1$ est équivalent à $y > \frac{1}{x}$. Donc dans le demi-plan situé à droite de l'axe des ordonnés, on colorie la zone située en dessous de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ alors que dans le demi-plan situé à gauche de l'axe des ordonnés on va colorier la zone située au dessus de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.



2. Le domaine de définition de h est l'ensemble des réels x tels que $\lambda x < 1$. Si $\lambda > 0$, alors il s'agit de l'intervalle $]-\infty;\lambda[$ et si $\lambda < 0$ alors c'est l'intervalle $]\lambda;+\infty[$.

   La fonction h est dérivable sur son domaine de définition et $\forall x \in \mathscr{D}_h$, $h'(x) = \dfrac{-\lambda}{1-\lambda x}$.

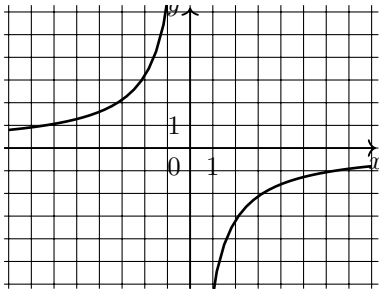
   Lorsque $x \in \mathscr{D}_h$, on a $1 - \lambda x > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $-\lambda$.

   Si $\lambda > 0$, h est décroissante sur son domaine de définition, et si $\lambda < 0$, h est croissante sur son domaine de définition.

3. Il s'agit de représenter la courbe d'équation $\ln(1-xy) = 2$. Or :

$$\ln(1-xy) = 2 \Leftrightarrow xy = 1 - \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y = \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{x} \end{cases} .$$

   On obtient donc la courbe suivante :



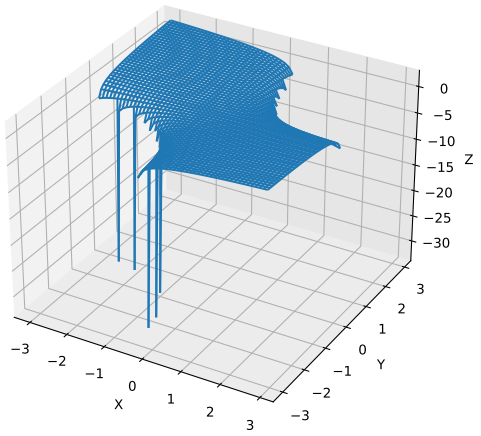
4. Tracé filaire :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D  # Fonction pour la 3D

def f(x,y):
    if x*y<1:
        return np.log(1-x*y)
    else:
        return 'nan'

x = np.arange(-3, 3, 0.1)
y = np.arange(-3, 3, 0.1)
x,y=np.meshgrid(x,y) # permet de transformer les listes x et y
        #en tableau pour créer le "maillage"
(lx,ly)=np.shape(x)
z=np.zeros([lx,ly])
for i in range(lx):
    for j in range(ly):
        z[i,j]=f(x[i,j],y[i,j])

# Tracé du résultat en 3D
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.plot_wireframe(x, y, z, rstride=1, cstride=1)  # Tracé filaire
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
plt.show()
```



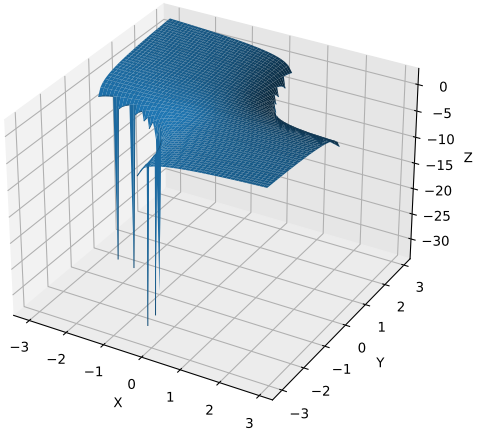
Tracé de surface :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D  # Fonction pour la 3D
```

```
def f(x,y):
    if x*y<1:
        return np.log(1-x*y)
    else:
        return 'nan'

x = np.arange(-3, 3, 0.1)
y = np.arange(-3, 3, 0.1)
x,y=np.meshgrid(x,y) # permet de transformer les listes x et y
        #en tableau pour créer le "maillage"
(lx,ly)=np.shape(x)
z=np.zeros([lx,ly])
for i in range(lx):
    for j in range(ly):
        z[i,j]=f(x[i,j],y[i,j])

# Tracé du résultat en 3D
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.plot_surface(x, y, z, rstride=1, cstride=1)  # Tracé de surface
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
plt.show()
```



Correction de l'exercice 3 :

1. On remarque que $\frac{1}{2}(x^2+y^2)-|xy|=\frac{1}{2}(|x|-|y|)^2$.

   Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(|x|-|y|)^2\geqslant 0$, donc $\frac{1}{2}(x^2+y^2)\geqslant |xy|$.

   Grâce à cela on peut écrire que, pour tout $(x,y)\in]-1;1[^2\backslash\{(0,0)\}$, $|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}$ et on a évidemment $|f(0,0)|\leqslant\frac{1}{2}$.

   Ainsi, pour tout $(x,y)\in\mathscr{P}$, $|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}$, ce qui signifie que f est bien bornée sur son ensemble de définition.
2. $f(x,x)=\frac{1}{2}$ et $f(x,0)=0$. On a donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Correction de l'exercice 4 :

Il est intéressant, dans cet exercice, d'écrire f sous la forme $f(x,y)=\mathrm{e}^{y\ln(x)}$.

1. Par produit de fonctions usuelles, la fonction $(x,y)\mapsto y\ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par composée, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$.
2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{x}\mathrm{e}^{y\ln(x)}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=\ln(x)\mathrm{e}^{y\ln(x)}$.
3. D'après le cours, lorsque (x,y) est proche de $(1,1)$ on a :

$$f(x,y)-f(1,1)\approx\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=x-1.$$

   Comme $f(1,1)=1$, on a donc, au voisinage de $(1,1)$, $f(x,y)\approx x$.