G2E 2019
Correction

Problème 1 :

Partie A : Étude de trois fonctions

1. — La fonction nulle est positive ou nulle et pour tout $x > 0$, on a $x > 0$, $\sigma^2 > 0$ et $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} > 0$ donc $f(x) > 0$.
   Pour résumer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
   — La fonction nulle est continue donc f est continue sur $[0; +\infty[$.
   Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x}{\sigma^2}$, $x \mapsto -\dfrac{x^2}{2\sigma^2}$ et $t \mapsto e^t$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc par composée et produit, f est continue sur $]0; +\infty[$.
   Pour résumer, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   — Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1.
   Comme f est nulle sur $]-\infty; 0]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 0.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
   Soit $A > 0$,
   $$\int_0^A \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}.$$
   Or $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} 1 - e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} = 1$.
   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1.
   Pour résumer, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut $0 + 1 = 1$.

   f est donc bien une fonction de densité.

2. a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = (1-x)e^{-x}$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

   g est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, donc g admet un maximum global en 1 qui vaut $g(1) = e^{-1}$.

   b) On peut remarquer que, pour tout $x > 0$, $f_\sigma(x) = \dfrac{2}{x} g\left(\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$.
   D'après la question précédente, $g\left(\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{e}$, donc
   $$\forall x > 0, \qquad f_\sigma(x) \leqslant \frac{2}{xe} = h(x).$$

   c) D'après la question précédente, $f_\sigma(x) = h(x) \Leftrightarrow g\left(\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \dfrac{1}{e}$.
   D'après l'étude de la question 2. a), $g(y) = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow y = 1$.

Donc pour $x > 0$, $\qquad f_\sigma(x) = h(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2\sigma^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2\sigma^2$.

Donc, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $f_\sigma(x) = h(x)$, uniquement pour $x = \sigma\sqrt{2}$. Notons $a = \sigma\sqrt{2}$.

Déterminons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_\sigma$ et $\mathscr{H}$ en a.

On a, pour $x > 0$, $f'_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sigma^2}\left(1 - \dfrac{x^2}{\sigma^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ et $h'(x) = -\dfrac{2}{\mathrm{e}x^2}$.

Ainsi $f'_\sigma(a) = -\dfrac{1}{\sigma^2\mathrm{e}} = h'(a)$ et comme on a aussi $f_\sigma(a) = h(a)$, les courbes $\mathscr{C}_\sigma$ et $\mathscr{H}$ ont la même tangente au point d'abscisse a, la droite d'équation : $y = -\dfrac{1}{\sigma^2\mathrm{e}}\left(x - \sigma\sqrt{2}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}\sigma}$.

Partie B : Une nouvelle loi

1. a) Par définition d'une fonction de répartition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_M(x) = P(M \leqslant x)$.
   Or $M = N_1^2$, donc si $x < 0$, l'événement $[M \leqslant x]$ est impossible et donc $F_M(x) = 0$.
   Pour $x \geqslant 0$, $[M \leqslant x] \Leftrightarrow [-\sqrt{x} \leqslant N_1 \leqslant \sqrt{x}]$. Donc

$$F_M(x) = P(-\sqrt{x} \leqslant N_1 \leqslant \sqrt{x}) = F_{N_1}(\sqrt{x}) - F_{N_1}(-\sqrt{x}).$$

   Pour résumer, $F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ F_{N_1}(\sqrt{x}) - F_{N_1}(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

   La fonction nulle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc F_M est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 0]$.

   La fonction F_{N_1} est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car c'est une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par composée et différence de fonctions $\mathscr{C}^1$, F_M est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Pour résumer, F_M est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

   Donc F_M est aussi continue sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, F_{N_1} étant continue en 0,

$$\lim_{x \to 0^+} F_M(x) = F_{N_1}(0) - F_{N_1}(0) = 0 = \lim_{x \to 0^-} F_M(x).$$

   Donc F_M est continue sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi, M est bien une variable à densité.

   b) Pour déterminer une densité de M il suffit de dériver F_M là où c'est possible et de « compléter » les points manquants. Une densité de M est donc définie par

$$\begin{aligned} f_M(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(F'_{N_1}(\sqrt{x}) + F'_{N_1}(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(\lambda - t)}}\mathrm{d}t$ est continue sur $]0; \|ambda[$ donc l'intégrale à calculer est impropre en 0 et en λ.

   La fonction $\varphi : \theta \mapsto \dfrac{\lambda}{2}(1 + \sin(\theta))$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[0; \lambda]$. De plus $\varphi'(\theta) = \dfrac{\lambda}{2}\cos(\theta)$.

   D'après le théorème de changement de variable généralisé, en cas de convergence des intégrales on aura :

$$\begin{aligned}
\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda-t)}} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{\lambda}{2}\cos(\theta)}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}(1+\sin(\theta))\left(\lambda-\frac{\lambda}{2}(1+\sin(\theta))\right)}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{(1+\sin(\theta))(1-\sin(\theta))}}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{car } \lambda>0 \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}\theta \quad \text{car } \cos(\theta)>0 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[
\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}\theta$ n'est pas une intégrale impropre, elle est convergente et donc $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda-t)}}$ est convergente et :

$$\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda-t)}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}\theta = \pi.$$

3. a) Comme N_1 et N_2 suivent la même loi, M et N_2^2 suivent aussi la même loi et ont donc toutes les deux pour densité, la fonction f_M déterminée à la question B. 1. b).
N_1 et N_2 sont supposées indépendantes donc N_1^2 et N_2^2 sont aussi indépendantes. Ainsi, d'après le rappel, S est une variable à densité dont une densité est définie par :

$$\begin{aligned}
f_S(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_M(t) f_M(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\sigma^2}} f_M(x-t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } f_M(t)=0 \text{ si } t<0.
\end{aligned}$$

Si $x \leqslant 0$, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $x-t \leqslant 0$ et donc $f_M(x-t)=0$. Ainsi, pour $x \leqslant 0$, $f_S(x)=0$.
Si $x>0$, il nous faut découper l'intégrale en 2 :

$$\begin{aligned}
f_S(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\sigma^2}} \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(x-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{x-t}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\sigma^2}} \times 0\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2\sigma^2}}}{2\pi\sigma^2}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2\sigma^2}}}{2\sigma^2} \qquad \text{d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

En résumé $f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x>0 \end{cases}$.

b) Déterminons la fonction de répartition de Z. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = P(Z \leqslant x)$.
Pour tout $x<0$, l'événement $[\sqrt{S} \leqslant x]$ est impossible donc $F_Z(x)=0$.
Pour $x=0$, $[\sqrt{S} \leqslant 0] = [S=0]$ et comme S est une variable à densité, $P(S=0)=0$ et donc $F_Z(0)=0$.
Pour tout $x>0$, $[\sqrt{S} \leqslant x] \Leftrightarrow [S \leqslant x^2]$ donc $F_Z(x) = F_S(x^2)$.
En résumé $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ F_S(x^2) & \text{si } x>0 \end{cases}$.
La fonction nulle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc F_Z est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0]$.
La fonction F_S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car, sur $\mathbb{R}^{+*}$, c'est une primitive de la fonction f_S qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, et la fonction $x \mapsto x^2$ est $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Par composée de fonctions $\mathscr{C}^1$, F_Z est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour résumer, F_Z est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Donc F_Z est aussi continue sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, F_S est continue en 0 (fonction de réparation d'une variable à densité) et $F_S(0)=0$ car f_S est nulle sur $]-\infty;0]$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} F_Z(x) = F_S(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} F_Z(x).$$

Donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, Z est une variable à densité et une densité de Z s'obtient en dérivant F_Z là où c'est possible et en « complétant » les points manquants :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x f_S(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On a donc bien $f_Z = f_\sigma$.

Partie C : Suite des moments

1. a) Sous réserve de convergence,

$$u_0 = E(Z^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

car f_1 est une densité de probabilité.
Sous réserve de convergence $u_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, car f_1 est nulle sur $]-\infty;0]$.
La fonction $x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A > 0$. On pose :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & v(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;A]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x &= \left[-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A + \int_0^A \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= -A\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + \int_0^A \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

D'après les croissances comparées $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = 0$.
D'après notre cours, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente, ce qui signifie que u_1 existe et

$$u_1 = \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Sous réserve de convergence $u_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, car f_1 est nulle sur $]-\infty;0]$.
La fonction $x \mapsto x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0;+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A > 0$. On pose :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & v(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;A]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x &= \left[-x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A + 2\int_0^A x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= -A^2\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + 2\left[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A = -A^2\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} - 2 - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + 2 \end{aligned}$$

D'après les croissances comparées $\lim\limits_{A\to+\infty} A^2 \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = 0$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente, ce qui signifie que u_2 existe et

$$u_2 = \int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0 + 0 + 2 = 2.$$

b) D'après la question précédente, u_1 existe c'est-à-dire Z admet une espérance et $E(Z) = u_1 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

D'après la question précédente, u_2 existe c'est-à-dire Z admet un moment d'ordre 2 et donc Z admet une variance.

D'après la formule de Kœnig-Huygens, $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = u_2 - u_1^2 = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

2. a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(k)$: « u_k existe et $u_k = k u_{k-2}$ » est vraie pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

Pour $k = 2$, la propriété est bien vérifiée d'après la question C. 1. a).

Soit $k \geqslant 2$, un entier fixé. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Sous réserve de convergence $u_{k+1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{k+2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, car f_1 est nulle sur $]-\infty; 0]$.

La fonction $x \mapsto x^{k+2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $A > 0$. On pose :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^{k+1} & u'(x) = (k+1)x^k \\ v'(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & v(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; A]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{k+2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x &= \left[-x^{k+1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A + (k+1)\int_0^A x^k \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= -A^{k+1}\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + (k+1)\int_0^A x^k \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

D'après les croissances comparées $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{k+1} \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = 0$.

De plus, d'après $\mathscr{P}(k)$, $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A x^k \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = u_{k-1}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{k+2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente, ce qui signifie que u_{k+1} existe et

$$u_{k+1} = \int_0^{+\infty} x^{k+2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0 + (k+1)u_{k-1} = (k+1)u_{k-1}.$$

$\mathscr{P}(k+1)$ est bien vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, u_k existe et $u_k = k u_{k-2}$.

b) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(p)$: « $u_{2p} = 2^p p!$ et $u_{2p+1} = \dfrac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ » est vraie pour tout entier p.

Pour $p = 0$, la propriété est bien vérifiée car, d'après la question C. 1. a) :

$$u_0 = 1 = 2^0\ 0! \qquad u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1!}{2^0\ 0!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathscr{P}(p)$ est vraie. D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence :

$$u_{2(p+1)} = (2p+2)u_{2p} = 2(p+1) \times 2^p p! = 2^{p+1}(p+1)!$$

$$\begin{aligned} u_{2(p+1)+1} = u_{2p+3} = (2p+3)u_{2p+1} &= (2p+3) \times \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!}{(2p+2)2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{(2p+3)!}{2^{p+1}(p+1)!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vérifiée.
Grâce au principe de récurrence, on a montré que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_{2p} = 2^p p! \qquad \text{et} \qquad u_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

c) On a

$$u_{2p}u_{2p+1} = 2^p p! \times \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = (2p+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$u_{2p+1}u_{2p+2} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \times 2^{p+1}(p+1)! = 2(p+1) \times (2p+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}} = (2p+2)!\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Dans tous les cas $u_k u_{k+1} = (k+1)!\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Partie D : Étude de deux autres suites et calculs d'équivalents

1. D'après la question C. 2. c),

$$v_k v_{k+1} = \frac{k!(k+1)!}{u_k^2 u_{k+1}^2} = \frac{k!(k+1)!}{((k+1)!)^2} \times \frac{2}{\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Donc $v_k v_{k+1} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{k\pi}$.

2. a) D'après la question C. 2. a)

$$v_{k+1} = \frac{(k+1)!}{u_{k+1}^2} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^2 u_{k-1}^2} = \frac{(k+1)k}{(k+1)^2} \times v_{k-1} = \frac{k}{k+1}v_{k+1}.$$

b) $w_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = 1$ et $w_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{array}{ll} u(t) = \sin^k(t) & u'(t) = k\cos(t)\sin^{k-1}(t) \\ v'(t) = \sin(t) & v(t) = -\cos(t) \end{array}$$

u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\sin^k(t)\right]_0^{\pi/2} + k\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{k-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= k\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^{k-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= kw_{k-1} - kw_{k+1} \\ \implies w_{k+1} &= \frac{k}{k+1}w_{k-1}. \end{aligned}$$

On retrouve bien la même relation de récurrence que pour la suite v.

c) v et w vérifient la même relation de récurrence et :

$$w_0 = 1 = v_0 \qquad \text{et} w_1 = \frac{2}{\pi} = \frac{1!}{u_1^2} = v_1.$$

Donc les suites v et w vérifient la même relation de récurrence et leur deux premiers termes sont égaux, on peut montrer par une récurrence rapide que les deux suites sont égales.

3. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$w_{k+1} - w_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^k(t)(\sin(t) - 1)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^k(t) \geqslant 0$ et $\sin(t) - 1 \leqslant 0$. Donc par positivité de l'intégrale, $w_{k+1} - w_k \leqslant 0$. La suite w est décroissante.

b) Les suites v et w sont égales donc v est décroissante et comme v est une suite à termes strictement positifs, on a $\frac{v_{k+1}}{v_k} \leqslant 1$.

De plus, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{k}{k+1} \times \frac{v_{k-1}}{v_k}$, et toujours grâce à la décroissance de v, $\frac{v_{k-1}}{v_k} \geqslant 1$.

Donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{v_{k+1}}{v_k} \geqslant \frac{k}{k+1}$, et la relation est bien vraie aussi pour $k = 0$.

c) D'après la question précédente, comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 1$, par encadrement de limites, $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{v_{k+1}}{v_k} = 1$ ce qui signifie que $v_{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k$.

De plus on a vu dans la question D. 1. que $v_{k+1}v_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k\pi}$.

Donc on en déduit que $v_k^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k\pi}$.

Par conséquent, $v_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{2p\pi}} = \frac{1}{\sqrt{p\pi}}$.

Or $v_{2p} = \frac{(2p)!}{u_{2p}^2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} = \frac{1}{4^p}\binom{2p}{p}$.

En combinant tout cela, on obtient : $\binom{2p}{p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{4^p}{\sqrt{p\pi}}$.

Problème 2 :

Partie A

1. a) Les matrices de $\mathscr{E}$ sont symétriques réelles, donc d'après le théorème spectral, elles sont diagonalisables.
<u>Autre méthode :</u>
On cherche les valeurs propres de $M_{a,b}$. Comme c'est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que le réel λ est valeur propre de $M_{a,b}$ si, et seulement si, $\det(M_{a,b} - \lambda I_2) = 0$. On calcule :

$$\begin{aligned}\det(M_{a,b} - \lambda I_2) &= (a-\lambda)^2 - b^2 \\ &= (a-\lambda-b)(a-\lambda+b)\end{aligned}$$

D'où $\lambda = a - b$ ou $\lambda = a + b$.

- Si $b \neq 0$, alors $a + b \neq a - b$ et donc $M_{a,b}$ admet 2 valeurs propres et comme $M_{a,b} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que $M_{a,b}$ est diagonalisable (condition suffisante de diagonalisabilité).
- Si $b = 0$, alors $M_{a,0} = aI_2$ est une matrice diagonale, donc diagonalisable (semblable à elle-même)

b) On a $M_{a,b} = aI + bJ$ (où les matrices I, J sont introduites juste après dans l'énoncé) donc $\mathscr{E} = \text{Vect}(I, J)$.
Cela montre que $\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$
Autre méthode : on montre que $\mathscr{E}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, non vide (il contient $M_{0,0}$: matrice nulle) et que $\mathscr{E}$ est stable par combinaisons linéaires de deux matrices.

c) Soient $M_{a,b} = aI + bJ$ et $M_{a',b'} = a'I + b'J$ deux matrices de $\mathscr{E}$. On a :

$$\begin{aligned}M_{a,b}M_{a',b'} &= (aI+bJ)(a'I+b'J) \\ &= aa'I + ab'J + ba'J + bb'J^2,\end{aligned}$$

et comme le produit des réels commute, on obtient la même chose en échangeant a et a' ainsi que b et b'.
En conclusion $\boxed{M_{a,b} \times M_{a',b'} = M_{a',b'} \times M_{a,b}.}$
Remarque : comme $J^2 = I$, on a en fait $M_{a,b}M_{a',b'} = M_{aa'+bb',ab'+ba'}$ ce qui montre que $\mathscr{E}$ est stable pour le produit des matrices.

2. a) Comme $\mathscr{E} = \text{Vect}(I, J)$ (d'après 1.b.), la famille (I, J) est génératrice de $\mathscr{E}$.
Montrons qu'elle est libre : soient λ et μ des réels tels que $\lambda I + \mu J = 0_2$, alors $\begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ \mu & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ d'où $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Donc (I, J) est libre.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{B} = (I, J) \text{ est une base de } \mathscr{E} \text{ et } \dim(\mathscr{E}) = \text{card}(\mathscr{B}) = 2.}$

b) Puisque $M_{a,b} = aI + bJ$, $\boxed{\text{les coordonnées de } M_{a,b} \text{ dans } \mathscr{B} \text{ sont } a \text{ et } b.}$

3. a) Comme $U = M_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ et $V = M_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$, U et V appartiennent à $\mathscr{E}$.
Par ailleurs, la famille (U, V) possède deux éléments et $\dim(\mathscr{E}) = 2$, il suffit donc de montrer que $\mathscr{B}'$ est libre.
Soient λ et μ des réels tels que $\lambda U + \mu V = 0_2$, alors $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu & \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, d'où :
$\frac{1}{2}(\lambda + \mu) = 0$ et $\frac{1}{2}(\lambda - \mu) = 0$ ce qui donne par somme $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$. La famille (U, V) est libre.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathscr{E}.}$
D'après 2.b., on a $U = M_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}J$ et $V = M_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}J$.
Donc la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ est la matrice $\boxed{P = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.}$

b) On calcule $U^2 = U$ et $V^2 = V$, donc par récurrence immédiate : $\boxed{\text{pour } n \geqslant 1, \quad U^n = U \text{ et } V^n = V.}$
On calcule également $\boxed{UV = 0_2.}$

c) On commence par déterminer les coordonnées de $M_{a,b}$ dans la base $\mathscr{B}'$.
On remarque que $I = U + V$ et $J = U - V$ donc

$$M_{a,b} = aI + bJ = (a+b)U + (a-b)V.$$

Autre méthode :
on peut utiliser la formule de changement de base pour les vecteurs (ici : vecteurs de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$, qui sont donc des matrices).

On connait d'après 2.b. la matrice colonne X de $M_{a,b}$ dans la base $\mathscr{B}$: $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ qui est P.
Si X' désigne la matrice colonne de $M_{a,b}$ dans la base $\mathscr{B}'$, la formule du cours donne $X' = P^{-1}X$.
Calcul de P^{-1} : c'est une matrice 2×2 de déterminant $\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (comme il est non nul, cela confirme que P est inversible comme toute matrice de passage). La formule du cours pour l'inverse d'une matrice 2×2 donne $P^{-1} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
On calcule ensuite $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$ d'où $M_{a,b} = (a+b)U + (a-b)V$.

Pour $n \geqslant 1$, on calcule ensuite $M_{a,b}^n = ((a+b)U + (a-b)V)^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton. On peut utiliser cette formule car les matrices $(a+b)U$ et $(a-b)V$ commutent (vu au 1.c. pour toutes les matrices de $\mathscr{E}$).

$$M_{a,b}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+b)^k U^k (a-b)^{n-k} V^{n-k}.$$

Or, pour $k \neq 0$ et $k \neq n$, $U^k = U$ et $V^{n-k} = V$, donc $U^k V^{n-k} = UV = 0_2$. Il ne reste donc dans la somme que le terme pour $k = 0$ et celui pour $k = n$. D'où $M_{a,b}^n = (a-b)^n V + (a+b)^n U$.
Remarque : pour $n = 1$, on retrouve bien la formule précédente et pour $n = 0$, la formule reste valable puisque $U + V = I$.

$\boxed{\text{Les coordonnées de } M_{a,b}^n \text{ dans la base } \mathscr{B}' \text{ sont } (a+b)^n, (a-b)^n.}$

Partie B

1. a) La matrice A est triangulaire supérieure, donc les valeurs propres se lisent sur la diagonale : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{c\}.}$
Si A est diagonalisable, alors A est semblable à la matrice diagonale cI_4, donc il existe une matrice P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P(cI_4)P^{-1} = cPP^{-1} = cI_4$, d'où $a = b = 0$.
Inversement, si $a = b = 0$, alors $A = cI_4$ est diagonale donc diagonalisable (semblable à elle-même).
Conclusion : $\boxed{A \text{ est diagonalisable équivaut à } a = b = 0}$.

2. a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
La formule est vraie pour $n = 0$ car $A^0 = I_4$ et d'autre part $M_{1,0} = I_2$ et $\frac{d^0 - c^0}{d-c} = 0$. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose la formule vraie pour n et on pose $\alpha = \dfrac{d^n - c^n}{d - c}$.
Alors $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} c^n & 0 & \alpha a & \alpha b \\ 0 & c^n & \alpha b & \alpha a \\ 0 & 0 & d^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{n+1} & 0 & ac^n + \alpha ad & bc^n + \alpha bd \\ 0 & c^{n+1} & bc^n + \alpha bd & ac^n + \alpha ad \\ 0 & 0 & d^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^{n+1} \end{pmatrix}$
or

$$\begin{aligned} c^n + \alpha d &= c^n + \frac{d^n - c^n}{d-c} d \\ &= \frac{dc^n - c^{n+1} + d^{n+1} - dc^n}{d-c} \\ &= \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d-c} \end{aligned}$$

donc le bloc en haut à droite de la matrice A^{n+1} est bien égal à $\frac{d^{n+1}-c^{n+1}}{d-c}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ d'où la formule pour $n+1$.

On a donc bien prouvé par récurrence la formule pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) A est triangulaire supérieure, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{c, d\}$ et comme ici, $c \neq d$, A admet deux valeurs propres, donc deux sous-espaces propres.

Pour l'espace propre associé à la valeur propre c :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_c(A) \iff \begin{cases} az+bt &= 0 \\ bz+at &= 0 \\ (d-c)z &= 0 \\ (d-c)t &= 0 \end{cases} \iff z = t = 0 \text{ donc } \boxed{E_c(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).}$$

Pour l'espace propre associé à la valeur propre d :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_d(A) \iff \begin{cases} cx+az+bt &= dx \\ cy+bz+at &= dy \\ dz &= dz \\ dt &= dt \end{cases} \iff \begin{cases} (c-d)x+az+bt &= 0 \\ (c-d)y+bz+at &= 0 \end{cases}$$

comme $c-d \neq 0$, on obtient

$$x = \frac{1}{d-c}(az+bt), \quad y = \frac{1}{d-c}(at+bz) \text{ ce qui donne } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t, \end{pmatrix} = \frac{z}{d-c}\begin{pmatrix} a \\ b \\ d-c \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{d-c}\begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \\ d-c \end{pmatrix} \text{ avec } z \text{ et } t$$

réels quelconques et donc aussi $\frac{z}{d-c}$ et $\frac{t}{d-c}$ réels quelconques.

D'où $\boxed{E_c(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ d-c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \\ d-c \end{pmatrix}\right).}$

c) Les deux sous-espaces propres de A sont de dimensions 2 (pour chacun, les deux vecteurs colonnes qui les engendrent sont non proportionnels), donc la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à 4 et comme $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, A est diagonalisable.

Soit Q la matrice dont les colonnes sont obtenues en juxtaposant les bases obtenues précédemment des deux sous-espaces propres (en commençant par celui pour la valeur propre c). On a :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & a \\ 0 & 0 & d-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{pmatrix} \text{ qui s'écrit bien avec 4 "blocs" de } \mathscr{E} \boxed{Q = \begin{pmatrix} M_{1,0} & M_{a,b} \\ M_{0,0} & M_{d-c,0} \end{pmatrix}}$$

On sait alors que $Q^{-1}AQ = D$ avec $\boxed{D = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}}$ et on a donc bien $A = QDQ^{-1}$.

Partie C

1. a) Pour une heure n donnée, les 4 événements $E_{i,n}, 1 \leqslant i \leqslant 4$ avec $E_{i,n}$: "le soldat se trouve à la tour numéro i à l'heure n" constituent un système complet car ils sont incompatibles (le soldat ne peut pas se trouver en même temps dans deux tours) et leur réunion est l'événement certain (le soldat se trouve dans l'une des 4 tours), donc la somme des 4 probabilités de ces événements est égale à 1. D'où $\boxed{\delta_n = 1 - \alpha_n - \beta_n - \delta_n.}$

b) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet $(E_{i,n}, 1 \leqslant i \leqslant 4)$, on a pour tout événement E : $P(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} P_{E_{i,n}}(E)P(E_{i,n})$.

On applique cette formule avec $E = E_{j,n+1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant 4$. Les probabilités de passage d'une tour à l'autre à chaque heure qui sont données dans l'énoncé sont les probabilités conditionnelles $P_{E_{i,n}}(E_{j,n+1})$. On peut compléter ces données puisque :

— si le soldat est en T_3, alors il reste en T_3 avec une probabilité $1-\frac{3}{20}-\frac{1}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$;
— si le soldat est en T_4, alors il reste en T_4 avec une probabilité $1-\frac{1}{20}-\frac{3}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n+\frac{3}{20}\gamma_n+\frac{1}{20}\delta_n\\ \beta_{n+1} &= \beta_n+\frac{1}{20}\gamma_n+\frac{3}{20}\delta_n\\ \gamma_{n+1} &= \frac{4}{5}\gamma_n\\ \delta_{n+1} &= \frac{4}{5}\delta_n\end{aligned}$$

ce qui s'écrit matriciellement $X_{n+1}=AX_n$ avec $A=\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{20}&\frac{1}{20}\\ 0&1&\frac{1}{20}&\frac{3}{20}\\ 0&0&\frac{4}{5}&0\\ 0&0&0&\frac{4}{5}\end{pmatrix}$ qui s'écrit avec 4 "blocs" de $\mathscr{E}$

$\boxed{A=\begin{pmatrix}M_{1,0}&M_{\frac{3}{20},\frac{1}{20}}\\ M_{0,0}&M_{\frac{4}{5},0}\end{pmatrix}}$.

c) La matrice A obtenue est de la forme de celle de la partie B avec $c=1$, $d=\frac{4}{5}$ (donc $c\neq d$), $a=\frac{3}{20}$ et $b=\frac{1}{20}$. Donc l'expression de A^n est donnée au 2.a. de la partie B. On calcule $\dfrac{d^n-c^n}{d-c}=5\left(1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right)$

et on explicite la matrice $\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)&\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)\\ 0&1&\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)&\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)\\ 0&0&\left(\frac{4}{5}\right)^n&0\\ 0&0&0&\left(\frac{4}{5}\right)^n\end{pmatrix}}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad X_n=A^nX_0$.
Pour $n=0$, l'égalité est vraie puisque $A^0=I_4$.
On suppose l'égalité vraie pour $n\in\mathbb{N}$ fixé. Alors $X_{n+1}=AX_n=AA^nX_0=A^{n+1}X_0$ d'où l'égalité pour $n+1$.
On obtient alors X_n en effectuant le produit matriciel A^nX_0 et en utilisant $\delta_0=1-\alpha_0-\beta_0-\gamma_0$.

$\boxed{X_n=\begin{pmatrix}\alpha_0+\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)(1+2\gamma_0-\alpha_0-\beta_0)\\ \beta_0+\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)(3-2\gamma_0-3\alpha_0-3\beta_0)\\ \left(\frac{4}{5}\right)^n\gamma_0\\ \left(\frac{4}{5}\right)^n(1-\alpha_0-\beta_0-\gamma_0)\end{pmatrix}}$.

2. a) Soient I,J,K les trois points définis par $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$. Alors le point M_n est à l'intérieur du tétraèdre $\mathscr{T}=OIJK$ puisque les coordonnées $(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)$ de M_n satisfont les 4 conditions : $\alpha_n\geqslant 0$, $\beta_n\geqslant 0$, $\gamma_n\geqslant 0$ et $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n\leqslant 1$ (car $\delta_n\geqslant 0$).

b) On a $\overrightarrow{OM}=\alpha_n\overrightarrow{OI}+\beta_n\overrightarrow{OJ}+\gamma_n\overrightarrow{OK}$, or $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MI}$ et de même avec $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OK}$, d'où $\overrightarrow{OM}=(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n)\overrightarrow{OM}+\alpha_n\overrightarrow{MI}+\beta_n\overrightarrow{MJ}+\gamma_n\overrightarrow{MK}$. Comme $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1-\delta_n$, l'égalité s'écrit encore : $\alpha_n\overrightarrow{MI}+\beta_n\overrightarrow{MJ}+\gamma_n\overrightarrow{MK}+\delta_n\overrightarrow{MO}=0$.
Et puisque $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\delta_n\neq 0$, cette relation montre que

$\boxed{\text{le point } M_n \text{ est le barycentre des quatre points } I,J,K,O \text{ affectés des coefficients } \alpha_n,\beta_n,\gamma_n,\delta_n.}$

c) Le point moyen des quatre sommets de $\mathscr{T}$ est l'isobarycentre des points I,J,K,O, ce qui signifie que $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=\delta_0=\dfrac{1}{4}$
On reprend alors le résultat obtenu au 1.c. qui donne ici : $\alpha_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n$
$\beta_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n$
$\gamma_n=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n$
$\delta_n=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim_{n\to+\infty}\beta_n=\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\gamma_n=\lim_{n\to+\infty}\delta_n=0$.

Le point M_n a donc une position limite qui est le barycentre des quatre points I, J, K, O affectés des coefficients $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0$, c'est à dire le milieu du segment IJ.
En termes probabilistes, cela signifie qu'au bout d'un temps assez long, le soldat a autant de chance de se trouver en T_1 ou en T_2 (une chance sur 2) et aucune chance de se trouver en T_3 ou en T_4.