# *Exercices : Espaces vectoriels*

## Familles de vecteurs

### Exercice 1 :

1. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
   Le vecteur $(1,-4,2)$ est-il combinaison linéaire de $((1,2,3),(2,1,3),(3,2,1),(3,1,2))$ ?
2. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
   Le vecteur $P = X^2 - 1$ est-il combinaison linéaire de $(3 - X^2, X^2 + 5X + 3)$ ?
3. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \cos(nx)$.
   Montrer que la fonction $g : x \mapsto (\cos(x))^5$ est une combinaison linéaire de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.
4. On pose $\overrightarrow{u} = (1+\mathrm{i}, 1-2\mathrm{i})$ et $\overrightarrow{v} = (2+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$.
   a) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, le vecteur $\overrightarrow{w} = (5+4\mathrm{i}, 5-2\mathrm{i})$ est-il une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ?
   b) Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, le vecteur $\overrightarrow{w} = (5+4\mathrm{i}, 5-2\mathrm{i})$ est-il une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ?

### Exercice 2 :

Pour chacun des ensembles suivant, préciser de quel espace vectoriel de référence ce sont des sous-ensembles puis en déterminer une famille génératrice.

1. $E_1 = \{(3x - y, -2x, \pi y + \ln(2)x)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ ;
2. $E_2 = \{(x,y,x,y,x) \in \mathbb{R}^5/3x + 4y = 0\}$ ;
3. $E_3 = \{(a-b)X^3 + 4bX^2 - a\sqrt{2}X + b - a/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ ;
4. $E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})/x - 2y + z = 0 \text{ et } -2x + y + 3z = 0 \right\}$ ;
5. $E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 3(a+b) - \mathrm{i}a & a + \mathrm{i}b \\ a - \mathrm{i}b & 2a - (a+b)\mathrm{i} \end{pmatrix} /(a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ ;
6. $E_6 = \{P \in \mathbb{C}_2[X]/P(2\mathrm{i}) = 0 \text{ et } P(-\sqrt{3}) = 0\}$.

### Exercice 3 :

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $\mathscr{F}_1 = ((1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,2,8,16))$ dans $\mathbb{R}^4$ ;
2. $\mathscr{F}_2 = (X^3, X^2(X-2), X(X-2)^2, (X-2)^3)$ dans $\mathbb{R}[X]$ ;
3. $\mathscr{F}_3 = \left( \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ;
4. $\mathscr{F}_4 = ((2+3\mathrm{i}, -3+\mathrm{i}), (-4+7\mathrm{i}, -5-5\mathrm{i}))$ dans $\mathbb{C}^2$ vu en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

### Exercice 4 :

On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} \\ f_2 : x \mapsto x^2 - 1 \\ f_3 : x \mapsto \ln(2-x) \end{cases} \qquad \begin{cases} g_1 : x \mapsto 1 \\ g_2 : x \mapsto \sin(x) \\ g_3 : x \mapsto \sin(2x) \\ g_4 : x \mapsto \sin^2(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1 : x \mapsto \ln(3-x) \\ h_2 : x \mapsto (x-3)\mathrm{e}^{4x} \\ h_3 : x \mapsto \ln(x^2 - 6x + 9) \end{cases}$$

1. Montrer que la famille $(f_1, f_2, f_3)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(]-\infty;2[,\mathbb{R})$.
2. Montrer que la famille $(g_1, g_2, g_3, g_4)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. La famille $(h_1, h_2, h_3)$ est-elle une famille libre ou liée de $\mathscr{F}(]-\infty;3[,\mathbb{R})$ ?

### Exercice 5 :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = (\arctan(x))^k$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

### Exercice 6 :

Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $S_n = (x \mapsto \cos(kx),\ k \in \{1,...,n\})$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
*Indication : il sera intéressant de dériver deux fois une égalité bien choisie.*

## Sous-espaces vectoriels

### Exercice 7 : Un classique

Soit $A$ une matrice fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où $n$ est un entier naturel non nul.
On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})/AM = MA\}$.
Montrer que $E$ est un espace vectoriel.

### Exercice 8 :

On note $\mathscr{F}([0;1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[0;1]$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.
Montrer que l'ensemble $E$ des fonctions $f$ définies sur $[0;1]$ et vérifiant $f(1) = 2f(0)$ est un espace vectoriel.

Qu'en est-il de l'ensemble des fonctions $f$ définies sur $[0;1]$ et vérifiant $f(1) = 2 + f(0)$ ?

### Exercice 9 :

Soient $a$ et $b$ deux fonctions définies et continues sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = 0$.
Montrer que l'ensemble des solutions sur $I$ de cette équation est un espace vectoriel.
Qu'en est-il de l'ensemble des solutions de $a(x)y' + b(x)y = 2$ ?

## Base, dimension

### Exercice 10 :

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels puis en déterminer une base et la dimension :

1. $A = \{(x - y, x + y, 2x - 3y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ ;
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/2x = y \text{ et } y = 3z\}$ ;
3. $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$ ;
4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x+y+z & y \\ z & y & x \end{pmatrix} /(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ ;
5. $E = \{P \in \mathbb{R}[X]/P = aX^2 + (b - 2a)X + a - b + c \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ ;
6. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/P(1) = 0\}$ ;
7. dans $\mathscr{F}(]-1;1[, \mathbb{R})$, $G = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ avec $f_1 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $f_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f_4 : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

### Exercice 11 :

1. Soit $a$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.
2. Soient $a$ et $b$ deux réels.
   Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

### Exercice 12 :

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ et on note $\mathscr{B}_c$ sa base canonique.

1. On considère les polynômes $R_1 = -2X^3 + 4X^2 + 2X + 1$, $R_2 = -X^3 + X^2 + 3X - 1$, $R_3 = X^3 + X + 3$ et $R_4 = X^3 - X^2 + 2X$.
   Montrer que la famille $\mathscr{B} = (R_1, R_2, R_3, R_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. On considère le polynôme $Q = X^3 + 2X^2 + 2X + 5$.
   a) **À l'aide de la matrice de passage** de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$, déterminer les coordonnées de $Q$ dans la base $\mathscr{B}$.
   b) **Sans utiliser de matrice de passage** déterminer à nouveau les coordonnées de $Q$ dans la base $\mathscr{B}$.
   c) Quelle méthode vous semble préférable ? Pourquoi ?

### Exercice 13 :

On admet que $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$. On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

## Un peu plus difficile

### Exercice 14 :

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose $e'_j = \sum_{i=1}^{n} e_i - e_j$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base de $E$.
2. Donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et celle de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

### Exercice 15 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $(F_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la famille de polynômes définie par :
   $$\forall i \in [\![0; n]\!], \quad F_i = \prod_{k=0, k \neq i}^{n} (X - k) = X(X-1)\cdots(X-i+1)(X-i-1)\dots(X-n)$$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(F_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient $n$ un entier naturel, $a$ et $b$ deux réels distincts. Prouver que la famille $((X - a)^i (X - b)^{n-i})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

## Pour aller plus loin...

### Exercice 16 : $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel

Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

### Exercice 17 : Union de deux sev

Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace de $E$ alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

### Exercice 18 : Structure d'espace vectoriel

1. Dans $E = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ on définit une loi $+$ par $(x,y) + (x',y') = (xx', y+y')$ et une loi externe à coefficients dans $\mathbb{R}$ par $\lambda \cdot (x,y) = (x^\lambda, \lambda y)$. Vérifier que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $+$ usuelle et de la loi externe définie par $\lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, 0)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

### Exercice 19 : Une famille libre infinie

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_k$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$.

On souhaite montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour cela, nous allons raisonner par récurrence pour montrer que la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre », est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que la propriété $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   On souhaite montrer que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ est libre, donc on cherche tous les réels $a_1, \dots, a_{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_1 f_1(x) + \ldots + a_{n+1} f_{n+1}(x) = 0.$$

   a) Diviser l'égalité ci-dessus par $\mathrm{e}^{(n+1)x}$ puis en faisant tendre $x$ vers une valeur bien choisie, montrer que $a_{n+1} = 0$.

   b) Montrer ensuite que $a_1 = \ldots = a_n = 0$ puis conclure.

# *Correction*

## Correction de l'exercice 1 :

1. On cherche s'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\begin{aligned}
&(1,-4,2) = a(1,2,3)+b(2,1,3)+c(3,2,1)+d(3,1,2)\\
\Leftrightarrow &(1,-4,2) = (a,2a,3a)+(2b,b,3b)+(3c,2c,c)+(3d,d,2d)\\
\Leftrightarrow &(1,-4,2) = (a+2b+3c+3d, 2a+b+2c+d, 3a+3b+c+2d)\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a+2b+3c+3d=1\\ 2a+b+2c+d=-4\\ 3a+3b+c+2d=2\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a+2b+3c+3d=1\\ 3b+4c+5d=6 & L_2 \leftarrow 2L_1-L_2\\ 3b+8c+7d=1 & L_3 \leftarrow 3L_1-L_3\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a+2b+3c+3d=1\\ 3b+4c+5d=6\\ 4c+2d=-5 & L_3 \leftarrow L_3-L_2\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a=-c-\dfrac{23}{6}\\ b=2c+\dfrac{37}{6}\\ d=-2c-\dfrac{5}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

Nous avons donc une infinité de possibilités pour les valeurs de $a$, $b$, $c$ et $d$ ce qui signifie que $(1,-4,2)$ est combinaison linéaire de $((1,2,3),(2,1,3),(3,2,1),(3,1,2))$.
Si on veut donner un exemple de combinaison linéaire qui fonctionne, on choisit arbitrairement une valeur de $c$, on calcule les $a$, $b$ et $d$ correspondants et on donne alors une des relations qui fonctionne.

2. On cherche s'il existe des réels $a$ et $b$ tels que :

$$\begin{aligned}
P = a(3-X^2)+b(X^2+5X+3) &\Leftrightarrow X^2-1 = (-a+b)X^2+5bX+3a+3b\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=1\\ 5b=0\\ 3a+3b=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1\\ b=0\\ a=-\dfrac{1}{3}\end{cases}
\end{aligned}$$

$P$ n'est donc pas une combinaison linéaire de $(3-X^2, X^2+5X+3)$.

3. Cette question est, de façon un peu déguisée, une question de technique de linéarisation.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g(x) = (\cos(x))^5 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^5\\
&= \frac{1}{2^5}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}+5\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+10\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+10\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right)\\
&= \frac{1}{2^5}\left(2\cos(5x)+5\times 2\cos(3x)+10\times 2\cos(x)\right)\\
&= \frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos(x)
\end{aligned}$$

On a donc $g = \dfrac{1}{16}f_5+\dfrac{5}{16}f_3+\dfrac{5}{8}f_1 = \dfrac{5}{8}f_1+0f_2+\dfrac{5}{16}f_3+0f_4+\dfrac{1}{16}f_5$.

$g$ est bien une combinaison linéaire de la famille $(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)$.

4. a) On cherche s'il existe des **RÉELS** $a$ et $b$ tels que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v} &\Leftrightarrow (5+4\mathrm{i}, 5-2\mathrm{i}) = a(1+\mathrm{i}, 1-2\mathrm{i})+b(2+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5+4\mathrm{i} = a(1+\mathrm{i})+b(2+\mathrm{i})\\ 5-2\mathrm{i} = a(1-2\mathrm{i})+b(1-\mathrm{i})\end{cases}
\end{aligned}$$

comme $a$ et $b$ sont des réels on essaye d'identifier les parties réelles et imaginaires.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5+4\mathrm{i} = a+2b+\mathrm{i}(a+b)\\ 5-2\mathrm{i} = a+b+\mathrm{i}(-2a-b)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=5\\ a+b=4\\ a+b=5\\ -2a-b=-2\end{cases} \quad \text{car } a \text{ et } b \text{ sont des } \textbf{RÉELS}
\end{aligned}$$

Les lignes 2 et 3 du système étant incompatibles, ce système n'admet pas de solution. $\overrightarrow{w}$ n'est pas une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.

b) On cherche s'il existe des **COMPLEXES** $a$ et $b$ tels que :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}\\
&\Leftrightarrow (5+4\mathrm{i}, 5-2\mathrm{i}) = a(1+\mathrm{i}, 1-2\mathrm{i}) + b(2+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a(1+\mathrm{i}) + b(2+\mathrm{i}) = 5+4\mathrm{i}\\ a(1-2\mathrm{i}) + b(1-\mathrm{i}) = 5-2\mathrm{i}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a(1+\mathrm{i}) + b(2+\mathrm{i}) = 5+4\mathrm{i}\\ b[(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) - (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})] = (1-2\mathrm{i})(5+4\mathrm{i}) - (1+\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})\end{cases}\\
&\quad L_2 \leftarrow (1-2\mathrm{i})L_1 - (1+\mathrm{i})L_2\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a(1+\mathrm{i}) + b(2+\mathrm{i}) = 5+4\mathrm{i}\\ b(2-3\mathrm{i}) = 6-9\mathrm{i}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a(1+\mathrm{i}) + b(2+\mathrm{i}) = 5+4\mathrm{i}\\ b=3\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = \mathrm{i}\\ b=3\end{cases}
\end{aligned}$$

Ce système admet donc bien une solution (unique), ce qui signifie que $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.

*Autre méthode : on peut aussi écrire les complexes $a$ et $b$ sous leur forme algébrique $x_a + \mathrm{i}y_a$ et $x_b + \mathrm{i}y_b$ et reprendre la méthode d'identification des parties réelles et imaginaires.*

## Correction de l'exercice 2 :

1. D'après l'énoncé, $E_1 \subset \mathbb{R}^3$. De plus :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(3x-y, -2x, \pi y + \ln(2)x)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}\\
&= \{(3x, -2x, \ln(2)x) + (-y, 0, \pi y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}\\
&= \{x(3,-2,\ln(2)) + y(-1,0,\pi)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}\\
&= \mathrm{Vect}((3,-2,\ln(2)), (-1,0,\pi)).
\end{aligned}$$

La famille $((3,-2,\ln(2)), (1,0,\pi))$ est génératrice de $E_1$.

2. D'après l'énoncé, $E_2 \subset \mathbb{R}^5$. De plus :

$$\begin{aligned}
E_2 &= \{(x,y,x,y,x) \in \mathbb{R}^5/3x+4y=0\}\\
&= \left\{(x,y,x,y,x) \in \mathbb{R}^5/y = -\frac{3}{4}x\right\}\\
&= \left\{\left(x, -\frac{3}{4}x, x, -\frac{3}{4}x, x\right)/x \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{x\left(1, -\frac{3}{4}, 1, -\frac{3}{4}, 1\right)/x \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\left(1, -\frac{3}{4}, 1, -\frac{3}{4}, 1\right)\right).
\end{aligned}$$

La famille $\left(\left(1, -\frac{3}{4}, 1, -\frac{3}{4}, 1\right)\right)$ est génératrice de $E_2$.

3. D'après l'énoncé, $E_3 \subset \mathbb{R}_3[X]$ ou encore $E_3 \subset \mathbb{R}[X]$. De plus :

$$\begin{aligned}
E_3 &= \{(a-b)X^3 + 4bX^2 - a\sqrt{2}X + b - a/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}\\
&= \{a(X^3 - \sqrt{2}X - 1) + b(-X^3 + 4X^2 + 1)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}\\
&= \mathrm{Vect}(X^3 - \sqrt{2}X - 1, -X^3 + 4X^2 + 1).
\end{aligned}$$

La famille $(X^3 - \sqrt{2}X - 1, -X^3 + 4X^2 + 1)$ est génératrice de $E_3$.

4. D'après l'énoncé $E_4 \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Procédons à un petit calcul préliminaire :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0\\ -2x + y + 3z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - z\\ -4y + 2z + y + 3z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3}z\\ y = \frac{5}{3}z\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
E_4 &= \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})/x = \frac{7}{3}z \text{ et } y = \frac{5}{3}z\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} \frac{7}{3}z\\ \frac{5}{3}z\\ z\end{pmatrix}/z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z\begin{pmatrix} \frac{7}{3}\\ \frac{5}{3}\\ 1\end{pmatrix}/z \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{7}{3}\\ \frac{5}{3}\\ 1\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\ \frac{5}{3}\\ 1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $E_4$.

5. D'après l'énoncé $E_5 \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et comme il n'y a pas de précision d'énoncé on considère $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$$\begin{aligned}E_5 &= \left\{\begin{pmatrix}3(a+b)-\mathrm{i}a & a+\mathrm{i}b\\ a-\mathrm{i}b & 2a-(a+b)\mathrm{i}\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}(3-\mathrm{i})a & a\\ a & (2-\mathrm{i})a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3b & \mathrm{i}b\\ -\mathrm{i}b & -\mathrm{i}b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}\\ &= \left\{a\begin{pmatrix}3-\mathrm{i} & 1\\ 1 & 2-\mathrm{i}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3-\mathrm{i} & 1\\ 1 & 2-\mathrm{i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}3-\mathrm{i} & 1\\ 1 & 2-\mathrm{i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $E_5$.

6. D'après l'énoncé $E_6 \subset \mathbb{C}_2[X]$ et comme il n'y a pas de précision d'énoncé on considère $\mathbb{C}_2[X]$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$$\begin{aligned}E_6 &= \{P\in\mathbb{C}_2[X]/P(2\mathrm{i})=0 \text{ et } P(-\sqrt{3})=0\}\\ &= \{P\in\mathbb{C}_2[X]/\exists a\in\mathbb{C},\ P=a(X-2\mathrm{i})(X+\sqrt{3})\}\\ &= \{a(X-2\mathrm{i})(X+\sqrt{3})/a\in\mathbb{C}\}\\ &= \mathrm{Vect}\left((X-2\mathrm{i})(X+\sqrt{3})\right)\end{aligned}$$

La famille $\left((X-2\mathrm{i})(X+\sqrt{3})\right)$ est génératrice de $E_6$.

## Correction de l'exercice 3 :

1. On cherche tous les réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$\begin{aligned}&a(1,1,1,1)+b(1,2,3,4)+c(1,2,8,16)=(0,0,0,0)\\ \Leftrightarrow&(a+b+c,a+2b+2c,a+3b+8c,a+4b+16c)=(0,0,0,0)\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}a+b+c=0\\ a+2b+2c=0\\ a+3b+8c=0\\ a+4b+16c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b-c\\ b+c=0\\ 2b+7c=0\\ 3b+15c=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0\end{aligned}$$

$\mathscr{F}_1$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

2. On cherche tous les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que $aX^3+bX^2(X-2)+cX(X-2)^2+d(X-2)^3=0$.
Or on a :

$$\begin{aligned}&aX^3+bX^2(X-2)+cX(X-2)^2+d(X-2)^3=0\\ \Leftrightarrow&aX^3+b(X^3-2X^2)+c(X^3-4X^2+4X)+d(X^3-6X^2+12X-8)=0\\ \Leftrightarrow&(a+b+c+d)X^3+(-2b-4c-6d)X^2+(4c+12d)X-8d\\ &\qquad=0X^3+0X^2+0X+0\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}a+b+c+d=0\\ -2b-4c-6d=0\\ 4c+12d=0\\ -8d=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&a=b=c=d=0\end{aligned}$$

$\mathscr{F}_2$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

3. On peut remarquer immédiatement que $3\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
Donc $\mathscr{F}_3$ est une famille liée de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Comme $(-4+7\mathrm{i},-5-5\mathrm{i})=(1+2i)\times(2+3\mathrm{i},-3+\mathrm{i})$, la famille $\mathscr{F}_3$ est une famille liée de $\mathbb{C}^2$ vu en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Plaçons nous maintenant dans $\mathbb{C}^2$ vu en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On cherche $a$ et $b$ deux **réels** tels que :

$$\begin{aligned}&a(2+3\mathrm{i},-3+\mathrm{i})+b(-4+7\mathrm{i},-5-5\mathrm{i})=(0,0)\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}a(2+3\mathrm{i})+b(-4+7\mathrm{i})=0\\ a(-3+\mathrm{i})+b(-5-5\mathrm{i})=0\end{cases}\text{ par propriété de }\mathbb{C}^2\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}\underbrace{(2a-4b)}_{\in\mathbb{R}}+\mathrm{i}\underbrace{(3a+7b)}_{\in\mathbb{R}}=0\\ \underbrace{(-3a-5b)}_{\in\mathbb{R}}+\mathrm{i}\underbrace{(a-5b)}_{\in\mathbb{R}}=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}2a-4b=0\\ 3a+7b=0\\ -3a-5b=0\\ a-5b=0\end{cases}\text{ par propriété de }\mathbb{C}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}6b=0\\ 22b=0\\ -20b=0\\ a=5b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=0\end{aligned}$$

La famille est donc libre dans $\mathbb{C}^2$ vu en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

## Correction de l'exercice 4 :

1. On cherche tous les réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$\begin{aligned}
& af_1+bf_2+cf_3=0\\
\Leftrightarrow & \forall x\in]-\infty;2[,\quad a\mathrm{e}^{2x}+b(x^2-1)+c\ln(2-x)=0\\
\Longrightarrow & \begin{cases} a\mathrm{e}^2=0 & \text{en évaluant en } x=1\\ a\mathrm{e}^{-2}+c\ln(3)=0 & \text{en évaluant en } x=-1\\ a-b+c\ln(2)=0 & \text{en évaluant en } x=0\end{cases}\\
\Longrightarrow & \begin{cases} a=0 & \text{car } \mathrm{e}^2\neq 0\\ c=0 & \text{car } \ln(3)\neq 0\\ b=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Réciproquement, on a bien $a=b=c=0\Longrightarrow af_1+bf_2+cf_3=0$.
La famille $(f_1,f_2,f_3)$ est libre.

2. On cherche tous les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que :

$$\begin{aligned}
& ag_1+bg_2+cg_3+dg_4=0\\
\Leftrightarrow & \forall x\in\mathbb{R},\ a+b\sin(x)+c\sin(2x)+d\sin^2(x)=0\\
\Longrightarrow & \begin{cases} a=0 & \text{en évaluant en } x=0\\ a+b+d=0 & \text{en évaluant en } x=\dfrac{\pi}{2}\\ a-b+d=0 & \text{en évaluant en } x=-\dfrac{\pi}{2}\\ a+b\dfrac{\sqrt{2}}{2}+c+\dfrac{d}{2}=0 & \text{en évaluant en } x=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\\
\Longrightarrow & \begin{cases} a=0\\ b=0\\ d=0\\ c=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Réciproquement, on a bien $a=b=c=d=0\Longrightarrow ag_1+bg_2+cg_3+dg_4=0$.
La famille $(g_1,g_2,g_3,g_4)$ est libre.

3. Il s'agit ici de prendre un peu de recul pour s'éviter de gros calculs car

$$\forall x\in]-\infty;3[,\quad h_3(x)=\ln((x-3)^2)=2\ln(3-x)=2h_1(x).$$

Donc $h_3=2h_1+0h_2$ et ainsi la famille $(h_1,h_2,h_3)$ est liée.

## Correction de l'exercice 5 :

On cherche tous les réels $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_kf_k=0 &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k(\arctan(x))^k=0\\
&\Leftrightarrow \forall t\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ \sum_{k=0}^{n} a_kt^k=0\\
&\qquad \text{en posant } t=\arctan(x)\\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_kX^k=0,
\end{aligned}$$

car une fonction polynômiale est nulle sur un intervalle non réduit à un point si, et seulement si, le polynôme associé a une infinité de racines donc si, et seulement si, le polynôme est égal au polynôme nul.

Or, un polynôme est nul si, et seulement si, ses coefficients sont nuls donc, en conclusion :

$$\sum_{k=0}^{n} a_kf_k=0\Leftrightarrow \forall k\in[\![0;n]\!],\ a_k=0.$$

La famille $(f_k)_{[\![0;n]\!]}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

## Correction de l'exercice 6 :

Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$ : « la famille $S_n$ est libre » est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

— Pour $n=1$ : la fonction $x\mapsto\cos(x)$ n'est pas la fonction nulle donc la famille $(\cos)$ est bien libre.
$\mathscr{P}(1)$ est bien vraie.

— Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
On veut montrer que la famille $S_{n+1}$ est libre. On cherche donc tous les réels $a_1$, $\dots a_{n+1}$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad a_1\cos(x)+a_2\cos(2x)+\ldots+a_n\cos(nx)+a_{n+1}\cos((n+1)x)=0.\qquad (1)$$

En dérivant deux fois cette égalité on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad & -a_1\cos(x)-4a_2\cos(2x)+\ldots-n^2a_n\cos(nx)\\ & -(n+1)^2a_{n+1}\cos((n+1)x)=0.\qquad (2)\end{aligned}$$

À l'aide de l'opération $(n+1)^2(1)+(2)$, on obtient alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad a_1((n+1)^2-1)\cos(x)+((n+1)^2-4)a_2\cos(2x)+\ldots$$

$$+((n+1)^2-n^2)a_n\cos(nx)=0.$$

Donc d'après $\mathscr{P}(n)$, $\forall i\in[\![1;n]\!]$, $a_i((n+1)^2-i^2)=0$. Et comme $(n+1)^2-i^2\neq 0$, on en déduit que $\forall i\in[\![1;n]\!]$, $a_i=0$.

On remplace alors dans l'équation (1) et on obtient aussi $a_{n+1}=0$.

Ainsi la famille $S_{n+1}$ est libre.

Grâce au principe de récurrence, on a montré que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la famille $S_n$ est libre.

## Correction de l'exercice 7 :

On remarque que $E$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel connu.

Montrons que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$E$ est un ensemble non vide car la matrice nulle est dans cet ensemble. En effet on a $A0=0$ et $0A=0$ donc $A0=0A$ ce qui veut dire que $0\in E$.

On considère maintenant $K$ et $L$ deux matrices qui appartiennent à l'ensemble $E$. Cela veut dire que l'on a $AK=KA$ et $AL=LA$.

On considère aussi $a$ un réel.

On veut montrer que la matrice $aK+L$ est aussi dans $E$.

On a $A(aK+L)=aAK+AL=aKA+LA=(aK+L)A$. Cela signifie que $aK+L$ appartient à $E$.

On a donc bien montré que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$E$ est donc lui même un espace vectoriel.

## Correction de l'exercice 8 :

1. — $E$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathscr{F}([0;1],\mathbb{R})$.
   — La fonction nulle vérifie $f(1)=2f(0)$ donc la fonction nulle appartient à $E$ et donc $E$ n'est pas vide.
   — Soient $g$ et $h$ deux fonctions appartenant à $E$ et $\lambda$ un réel.
   Alors $\lambda g+h$ est une fonction de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ et :
   $$(\lambda g+h)(1)=\lambda g(1)+h(1)=\lambda 2g(0)+2h(0)=2(\lambda g+h)(0).$$
   Donc $\lambda g+h\in E$.

   Ainsi $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0;1],\mathbb{R})$ et donc $E$ est un espace vectoriel.
2. Notons $F=\{f\in\mathscr{F}([0;1],\mathbb{R})/f(1)=2+f(0)\}$.

   $F$ n'est pas un espace vectoriel pour plein de raisons, en voici deux :
   — la fonction nulle n'appartient pas à $F$.
   — La fonction $g:x\mapsto 2x$ et la fonction $h:x\mapsto 2x+1$ sont des éléments de $F$, mais $(g+h)(1)=5$ et $2+(g+h)(0)=3$ donc $g+h\notin F$.

## Correction de l'exercice 9 :

Notons $\mathscr{S}$ les solutions de l'équation différentielle donnée.

$\mathscr{S}$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $I$ dans $\mathbb{R}$.

De plus $\mathscr{S}$ n'est pas vide car la fonction nulle est solution de l'équation différentielle.

Soient maintenant deux fonctions $f$ et $g$ appartenant à $\mathscr{S}$ et $\lambda$ un réel quelconque.

Alors on a, pour tout $x\in I$ :

$$\begin{aligned}a(x)(\lambda f+g)'(x)+b(x)(\lambda f+g)(x)&=\lambda(a(x)f'(x)+b(x)f(x))+a(x)g'(x)+b(x)g(x)\\&=\lambda\times 0+0=0.\end{aligned}$$

Donc $\lambda f+g\in\mathscr{S}$.

En conclusion $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $I$ dans $\mathbb{R}$ donc c'est un espace vectoriel.

L'ensemble des solutions de $a(x)y'+b(x)y=2$ ne peut pas être un espace vectoriel car cet ensemble n'est pas stable par addition.

## Correction de l'exercice 10 :

Pour montrer que tous ces ensembles sont des espaces vectoriels nous allons les écrire sous forme Vect$(\ldots)$. Cela démontrera que ce sont des sous-espaces vectoriels donc des espaces vectoriels et de plus cela nous donnera une famille génératrice !

1. On a
   $$\begin{aligned}A&=\{(x-y,x+y,2x-3y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{(x,x,2x)+(-y,y,-3y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{x(1,1,2)+(-1,1,-3)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\mathrm{Vect}((1,1,2),(-1,1,-3))\end{aligned}$$
   On voit que $A$ est un sous-espace engendré, donc $A$ est un espace vectoriel.

   De plus, on voit aussi que la famille $\mathscr{B}=((1,1,2),(-1,1,-3))$ est une famille génératrice de $A$.

   Les deux vecteurs de la famille $\mathscr{B}$ ne sont visiblement pas proportionnels donc la famille $\mathscr{B}$ est libre.

   La famille $\mathscr{B}$ est libre et génératrice donc c'est une base de $A$ et $\dim(A)=2$ (plan vectoriel).
2. On a :
   $$\begin{aligned}B&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x=y\text{ et }y=3z\}\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/y=2x\text{ et }z=\frac{2}{3}x\right\}\\&=\left\{\left(x,2x,\frac{2}{3}x\right)/x\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{x\left(1,2,\frac{2}{3}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\left(1,2,\frac{2}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

On voit que $B$ est un sous-espace engendré donc $B$ est un espace vectoriel.

De plus, la famille $\mathscr{B} = \left(\left(1, 2, \frac{2}{3}\right)\right)$ est une famille génératrice de $B$.

La famille $\mathscr{B}$ est-elle libre ?

La famille $\mathscr{B}$ ne contient qu'un seul vecteur qui n'est pas nul donc cette famille est libre.

La famille $\mathscr{B}$ est donc une famille libre et génératrice de $B$, c'est donc une base de $B$ et $\dim(B) = 1$ (droite vectorielle).

3. Calcul préliminaire :

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z - y - z = 0 \\ t = y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 2y \\ t = y + z = 3y - 2x \end{cases}$$

Grâce à ce calcul on a :

$C = \{(x, y, -2x+2y, -2x+3y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x, 0, -2x, -2x)+(0, y, 2y, 3y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -2, -2) + y(0, 1, 2, 3)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, -2, -2), (0, 1, 2, 3))$

On voit que $C$ est un sous-espace engendré donc $C$ est un espace vectoriel.

De plus, la famille $\mathscr{B} = ((1, 0, -2, -2), (0, 1, 2, 3))$ est une famille génératrice de $C$.

Les deux vecteurs de la famille $\mathscr{B}$ ne sont visiblement pas proportionnels donc la famille $\mathscr{B}$ est libre.

La famille $\mathscr{B}$ est libre et génératrice donc c'est une base de $C$ et $\dim(C) = 2$.

4. On a :

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x+y+z & y \\ z & y & x \end{pmatrix} /(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ y & y & y \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} /(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} /(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

On voit que $D$ est un sous-espace engendré donc $D$ est un espace vectoriel.

De plus, la famille $\mathscr{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $D$.

La famille $\mathscr{B}$ est-elle libre ?

On cherche tout les réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+b+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow a = b = c = 0$$

La famille $\mathscr{B}$ est donc libre.

La famille $\mathscr{B}$ est donc une famille libre et génératrice de $D$, c'est donc une base de $D$ et $\dim(D) = 3$.

5. On a :

$E = \{P \in \mathbb{R}[X]/P = aX^2 + (b - 2a)X + a - b + c \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
$= \{aX^2 + (b - 2a)X + a - b + c/(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
$= \{a(X^2 - 2X + 1) + b(X - 1) + c \cdot 1/(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
$= \text{Vect}(X^2 - 2X + 1, X - 1, 1)$

On voit que $E$ est un sous-espace engendré donc $E$ est un espace vectoriel.

De plus la famille $\mathscr{B} = (X^2 - 2X + 1, X - 1, 1)$ est une famille génératrice de $E$.

La famille $\mathscr{B}$ est-elle libre ?

C'est une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts donc la famille $\mathscr{B}$ est libre.

La famille $\mathscr{B}$ est donc une famille libre et génératrice de $E$, c'est donc une base de $E$ et $\dim(E) = 3$.

6. Un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à $n$ peut s'écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$P(1) = 0$ équivaut à $a_0 = -\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Donc $F = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k(X^k - 1)/a_k \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}((X^k - 1)_{1 \leqslant k \leqslant n})$

On voit que $F$ est un sous-espace engendré donc $F$ est un espace vectoriel.

De plus, la famille $\mathscr{B} = ((X^k - 1)_{1 \leqslant k \leqslant n})$ est une famille génératrice de $F$.

Comme c'est une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, elle est libre.

Ainsi $\mathscr{B}$ est une base de $F$ et $\dim(F) = n$.

7. On voit que $G$ est un sous-espace engendré donc $G$ est un espace vectoriel.
   De plus, la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4)$ est génératrice de $G$.
   Mais cette famille est liée car : $f_1 + f_2 = 2f_3$ et $f_1 - f_2 = 2f_4$.
   On a donc $G = \text{Vect}(f_1, f_2)$, et donc la famille $(f_1, f_2)$ est génératrice de $G$.
   Montrons alors que la famille $(f_1, f_2)$ est libre.
   Supposons que l'on ait $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$. En évaluant en $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient que nécessairement :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\sqrt{3} + \beta\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$
   La famille $(f_1, f_2)$ est bien libre.
   La famille $(f_1, f_2)$ est donc une base de $G$ et $\dim(G) = 2$.

## Correction de l'exercice 11 :

1. Comme $a$ est une fonction continue elle admet des primitives sur $I$. Notons $A$ une primitive de $a$ sur $I$. On sait alors que l'ensemble des solutions de l'équation $y' + a(x)y = 0$ est :
$$\mathscr{S} = \{x \mapsto K\mathrm{e}^{-A(x)} / K \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)}).$$
   Notons $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)}$.
   $\mathscr{S}$ est le sous-espace engendré par la famille $(f)$. Donc $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel de dimension finie.
   La famille $(f)$ est génératrice de $\mathscr{S}$ et est libre car formée d'un seul vecteur non nul, donc $(f)$ est une base de $\mathscr{S}$ et ainsi $\dim(\mathscr{S}) = 1$.
2. On pose $\Delta = a^2 - 4b$ et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$.
   — Si $\Delta > 0$, on note $r_1$ et $r_2$ les deux racines réelles distinctes du polynôme $r^2 + ar + b$.
   On sait alors que $\mathscr{S} = \{x \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x} / (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Donc $\mathscr{S} = \text{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}, x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x})$.
   Notons $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$.
   $\mathscr{S}$ est le sous-espace engendré par la famille $(f_1, f_2)$. Donc $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel de dimension finie.
   La famille $(f_1, f_2)$ est génératrice de $\mathscr{S}$ et est libre car
$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, Af_1(x) + Bf_2(x) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A\mathrm{e}^{r_1} + B\mathrm{e}^{r_2} = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow A = B = 0 \text{ car } r_1 \neq r_2. \end{aligned}$$
   Donc $(f_1, f_2)$ est une base de $\mathscr{S}$ et ainsi $\dim(\mathscr{S}) = 2$.
   — Si $\Delta = 0$, on note $r_0$ l'unique racine du polynôme $r^2 + ar + b$.
   On sait alors que $\mathscr{S} = \{x \mapsto (A + Bx)\mathrm{e}^{r_0 x} / (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Donc $\mathscr{S} = \text{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{r_0 x}, x \mapsto x\mathrm{e}^{r_0 x})$.
   Notons $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_0 x}$ et $f_2 : x \mapsto x\mathrm{e}^{r_0 x}$.
   $\mathscr{S}$ est le sous-espace engendré par la famille $(f_1, f_2)$. Donc $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel de dimension finie.
   La famille $(f_1, f_2)$ est génératrice de $\mathscr{S}$ et est libre car
$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, Af_1(x) + Bf_2(x) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A\mathrm{e}^{r_0} + B\mathrm{e}^{r_0} = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$
   Donc $(f_1, f_2)$ est une base de $\mathscr{S}$ et ainsi $\dim(\mathscr{S}) = 2$.
   — Si $\Delta < 0$, on note $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ les deux racines complexes $(\beta \neq 0)$ du polynôme $r^2 + ar + b$.
   On sait alors que $\mathscr{S} = \{x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + Bsin(\beta x)) / (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Donc $\mathscr{S} = \text{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x))$.
   Notons $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$.
   $\mathscr{S}$ est le sous-espace engendré par la famille $(f_1, f_2)$. Donc $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel de dimension finie.
   La famille $(f_1, f_2)$ est génératrice de $\mathscr{S}$ et est libre car
$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, Af_1(x) + Bf_2(x) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$
   Donc $(f_1, f_2)$ est une base de $\mathscr{S}$ et ainsi $\dim(\mathscr{S}) = 2$.

## Correction de l'exercice 12 :

1. Déterminons le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B})$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B})) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -12 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & 11 \end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 5L_4 + 3L_2 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}\right) && L_4 \leftarrow 7L_4 + 20L_3 \\
&= 4
\end{aligned}$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B})$ est inversible donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. a) On note $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$ la matrice colonne des coordonnées de $Q$ dans la base $\mathscr{B}$, $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(Q)$ la matrice colonne des coordonnées de $Q$ dans la base canonique et $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$.

On a aisément $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche la valeur de $C$.

On sait que $D = PC$, donc $C = P^{-1}D$. Il nous faut donc déterminer $P^{-1}$ :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -12 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 20 & 11 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 + 5L_1 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 5L_4 + 3L_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 35 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 7L_1 + 10L_3 \\ L_2 \leftarrow 7L_2 - 5L_3 \\ \\ L_4 \leftarrow 7L_4 + 20L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 & 0 \\ -4 & 12 & -5 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -12 & 1 & 20 & 35 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 595 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 595 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -119 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 17L_1 + 16L_4 \\ L_2 \leftarrow 17L_2 - 29L_4 \\ L_3 \leftarrow 17L_3 + 3L_4 \end{array} & \begin{pmatrix} -175 & -35 & 490 & 590 \\ 280 & 175 & -665 & -1015 \\ -70 & -14 & 77 & 105 \\ -12 & 1 & 20 & 35 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{595}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{595}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{119}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{17}L_4 \end{array} & \begin{pmatrix} -\frac{5}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{14}{17} & \frac{16}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{5}{17} & -\frac{19}{17} & -\frac{29}{17} \\ \frac{10}{17} & \frac{2}{17} & -\frac{11}{17} & -\frac{15}{17} \\ -\frac{12}{17} & \frac{1}{17} & \frac{20}{17} & \frac{35}{17} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Donc $P^{-1} = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 14 & 16 \\ 8 & 5 & -19 & -29 \\ 10 & 2 & -11 & -15 \\ -12 & 1 & 20 & 35 \end{pmatrix}$.

On en déduit alors $C = P^{-1}D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Revenons à la définition de la notion de coordonnées. On cherche les réels

$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\begin{aligned}
&Q = aR_1 + bR_2 + cR_3 + dR_4\\
\Leftrightarrow &X^3 + 2X^2 + 2X + 5 = (-2a - b + c + d)X^3 + (4a + b - d)X^2\\
&\qquad\qquad + (2a + 3b + c + 2d)X + a - b + 3c\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} -2a - b + c + d = 1\\ 4a + b - d = 2\\ 2a + 3b + c + 2d = 2\\ a - b + 3c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c = 3\\ d = 4a + b - 2\\ 10a + 5b + c = 6\\ a - b + 3c = 5 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} c = 3 - 2a\\ d = 4a + b - 2\\ 8a + 5b = 3\\ -5a - b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 - 2a\\ d = 4a + b - 2\\ -17a = -17\\ b = -5a + 4 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} c = 1\\ d = 1\\ a = 1\\ b = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $C = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$.

c) On peut remarquer qu'un calcul d'inverse de matrice peut-être très très lourd. La méthode avec calcul de l'inverse de la matrice de passage est à réserver uniquement aux moments où la matrice est FACILE à inverser !

## Correction de l'exercice 13 :

1. On remarque tout d'abord que $\mathrm{card}(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ (1). Montrons maintenant que la famille $\mathscr{B}$ est libre.
   On cherche tous les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que :

$$\begin{aligned}
aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0\\ a + 2c + d = 0\\ -a - 2c + d = 0\\ a + b + c = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0\\ a + 2c + d = 0\\ 2d = 0 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3\\ 2c = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0\\ a = 0\\ d = 0\\ c = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   La famille $\mathscr{B}$ est donc libre. (2)
   En conclusion, grâce à (1) et (2), $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Revenons à la définition de notion de coordonnées. On cherche les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que :

$$\begin{aligned}
M = aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = -1\\ a + 2c + d = -1\\ -a - 2c + d = 3\\ a + b + c = -1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = -1\\ a + 2c + d = -1\\ 2d = 2 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3\\ 2c = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1\\ a = -2\\ d = 1\\ c = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(M) = \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 14 :

1. Montrons que la famille $\mathscr{B}'$ est libre.
   On cherche tous les réels $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tels que :
   On a alors :
$$\begin{aligned}
&a_1e_1' + a_2e_2' + \ldots + a_ne_n' = 0\\
\Rightarrow &a_1(e_2+\ldots+e_n) + a_2(e_1+e_3+\ldots+e_n) + \ldots + a_n(e_1+\ldots+e_{n-1}) = 0\\
\Rightarrow &(a_2+\ldots+a_n)e_1 + (a_1+a_3+\ldots+a_n)e_2 + \ldots + (a_1+\ldots+a_{n-1})e_n = 0\\
\Rightarrow &\begin{cases} a_2+\ldots+a_n = 0\\ a_1+a_3+\ldots+a_n = 0\\ \vdots\\ a_1+\ldots+a_{n-1} = 0\end{cases} \quad \text{car la famille } \mathscr{B} \text{ est libre}\\
\Rightarrow &\begin{cases} a_2+\ldots+a_n = 0 & \\ a_1-a_2 = 0 & L_2 \leftarrow L_2-L_1\\ a_1-a_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1\\ \vdots & \\ a_1-a_n = 0 & L_n \leftarrow L_n-L_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(n-1)a_1 = 0\\ a_2 = a_1\\ a_3 = a_1\\ \vdots\\ a_n = a_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0\\ a_2 = 0\\ a_3 = 0\\ \vdots\\ a_n = 0\end{cases}
\end{aligned}$$
   La famille $\mathscr{B}'$ est donc libre.
   Ainsi la famille $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $n$ vecteurs et $\dim(E) = n$, donc $\mathscr{B}'$ est une base de $E$.
2. Par définition des vecteurs $e_j'$, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est :
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \ldots & 1 & 0\end{pmatrix}.$$
   Il nous faut maintenant exprimer les vecteurs $e_i$ en fonction des $e_j'$.
   Pour cela on commence par remarquer que $\sum\limits_{j=1}^{n} e_j' = (n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} e_i$
   Et comme $e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i - e_j'$ on a donc $e_j = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} e_i' - e_j'$
   Donc la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ est
$$Q = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \ldots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \ldots & 1 & 2-n\end{pmatrix}.$$
   On retrouve bien que $PQ = I$...

## Correction de l'exercice 15 :

1. On cherche tous les réels $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ tels que :
$$a_0F_0(X) + a_1F_1(X) + a_2F_2(X) + \ldots + a_nF_n(X) = 0.$$
   On applique cette égalité pour $X = 0$. On remarque que $F_0(0) = (-1)^n n!$, $F_1(0) = 0$, $F_2(0) = 0$, ..., $F_n(0) = 0$, donc on obtient $a_0 = 0$.
   On procède de même pour $X = 1$ et on obtient $a_1 = 0$, puis ainsi de suite pour $X = 2, \ldots, n$.
   On vient donc de montrer que :
$$a_0F_0(X) + a_1F_1(X) + a_2F_2(X) + \ldots + a_nF_n(X) = 0 \Longrightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0.$$
   L'implication réciproque est évidemment vraie.
   Donc la famille $(F_0, \ldots, F_n)$ est libre.
   De plus, la famille $(F_0, \ldots, F_n)$ contient $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.
   Par conséquent, $(F_0, \ldots, F_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Notons $R_i = (X-a)^i(X-b)^{n-i}$. On cherche tous les réels $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ tels que :
$$a_0R_0(X) + a_1R_1(X) + a_2R_2(X) + \ldots + a_nR_n(X) = 0.$$
   On applique cette égalité pour $X = a$. On remarque que $R_0(a) = (a-b)^n$, $R_1(a) = 0$, $R_2(a) = 0$, ..., $R_n(a) = 0$, donc on obtient $a_0 = 0$.
   Ainsi :
$$\begin{aligned}
&a_0R_0(X) + a_1R_1(X) + a_2R_2(X) + \ldots + a_nR_n(X) = 0\\
\Longrightarrow &\begin{cases} a_0 = 0\\ a_1R_1(X) + a_2R_2(X) + \ldots + a_nR_n(X) = 0\end{cases}.
\end{aligned}$$
   Or
$$\begin{aligned}
&a_1R_1(X) + a_2R_2(X) + \ldots + a_nR_n(X) = 0\\
\Longrightarrow &(X-a)\left(a_1(X-b)^{n-1} + a_2(X-a)(X-b)^{n-2} + \ldots + a_n(X-a)^{n-1}\right) = 0\\
\Longrightarrow &a_1(X-b)^{n-1} + a_2(X-a)(X-b)^{n-2} + \ldots + a_n(X-a)^{n-1} = 0\\
\Longrightarrow &\text{ avec X=a, } a_1 = 0.
\end{aligned}$$
   On recommence le processus pour obtenir $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$.
   On vient donc de montrer que :
$$a_0R_0(X) + a_1R_1(X) + a_2R_2(X) + \ldots + a_nR_n(X) = 0 \Longrightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

L'implication réciproque est évidemment vraie.
Donc la famille $(R_0, \dots, R_n)$ est libre.
De plus, la famille $(R_0, \dots, R_n)$ contient $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.
Par conséquent, $(R_0, \dots, R_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

## Correction de l'exercice 16 :

— Il suffit d'écrire $\mathbb{C} = \{a \times 1 / a \in \mathbb{C}\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(1)$.
$\mathbb{C}$ est un sous-espace engendré donc c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
De plus la famille $(1)$ est libre et génératrice de $\mathbb{C}$ donc c'est une base de $\mathbb{C}$ et ainsi $\dim(\mathbb{C}) = 1$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

— Dans ce cas, on écrit : $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} / (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1, \mathrm{i})$.
$\mathbb{C}$ est un sous-espace engendré donc c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
De plus la famille $(1, \mathrm{i})$ est libre et génératrice de $\mathbb{C}$ donc c'est une base de $\mathbb{C}$ et ainsi $\dim(\mathbb{C}) = 2$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

## Correction de l'exercice 17 :

On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
On souhaite montrer qu'alors $F \subset G$ ou $G \subset F$. Raisonnons par l'absurde. C'est-à-dire que l'on suppose que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.

• $F \not\subset G$ signifie que l'on peut trouver un élément $x$ qui appartient à $F$ mais pas à $G$.
• $G \not\subset F$ signifie que l'on peut trouver un élément $y$ qui appartient à $G$ mais pas à $F$.
• Comme $x \in F$ alors $x \in F \cup G$ et de même $y \in F \cup G$. Donc comme $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ on a $x + y \in F \cup G$.

Cela signifie donc que soit $x + y \in F$ soit $x + y \in G$.
Imaginons que $x + y \in F$. Comme $-x \in F$ on a alors $(x+y) + (-x) \in F$ donc $y \in F$ ce qui est absurde.
On raisonne de même pour $x + y \in G$.

• Donc $F \subset G$ ou $G \subset F$.

## Correction de l'exercice 18 :

1. Il faut vérifier tous les points de la définition 1 du cours.
2. Il faut remarquer que $1(x,y) = (x,0) \neq (x,y)$. Donc ce n'est pas un espace vectoriel.

## Correction de l'exercice 19 :

1. La famille $(f_1)$ est libre car formée d'un seul vecteur non nul. Donc $\mathscr{P}(1)$ est bien vérifiée.
2. a)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k \mathrm{e}^{kx} = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad & \sum_{k=1}^{n+1} a_k \mathrm{e}^{(k-(n+1))x} = 0 \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad & a_1 \mathrm{e}^{-nx} + a_2 \mathrm{e}^{-(n-1)x} + \dots \\ & \qquad + a_n \mathrm{e}^{-x} + a_{n+1} = 0 \\ \Rightarrow & \; a_{n+1} = 0 \text{ en passant à la limite lorsque } x \to +\infty.\end{aligned}$$

b) On a donc montré que

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k \mathrm{e}^{kx} = 0\right) \Rightarrow \left(a_{n+1} = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^{kx} = 0\right).$$

Or, d'après $\mathscr{P}(n)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}^{kx} = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$.
On a donc montré que $a_1 = \dots = a_n = a_{n+1} = 0$.
Ainsi, la famille $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ est libre, c'est-à-dire $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout entier $n$ non nul, la famille
$(x \to \mathrm{e}^{kx})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.
En conclusion, la famille $(x \to \mathrm{e}^{kx})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est libre.